

APÉNDICE D

D. ESTUDIO EN PROFUNDIDAD DE OPERADORES DE INTERÉS EN LAS ETAPAS INICIALES DE LA VISIÓN

Dada la importancia de algunos operadores en las etapas iniciales de los procesos de visión, hemos decidido completar la teoría expuesta a lo largo del libro con el estudio en profundidad de los siguientes operadores: Diferencia de dos Gaussianas, Laplaciana de la Gaussiana y los filtros de Gabor. Los dos primeros se estudian ampliamente en el Capítulo 6, por lo que ahora sólo derivamos de forma analítica sus funciones de transferencia. Sin embargo, sobre en los filtros de Gabor profundizamos un poco más.

D.1 Función de transferencia de la diferencia de Gaussianas

La función Gaussiana para una variable viene dada por

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (\text{D.1})$$

La función de transferencia aplicando la transformada de Fourier resulta,

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-x^2/2\sigma^2)} e^{-iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-x^2/2\sigma^2 - iux)} dx \quad (\text{D.2})$$

Sabemos de Papoulis (1986) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(t+z)^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad (D.3)$$

además $-p(x+z)^2 = -px^2 - pz^2 - 2pzx$ si hacemos $p = 1/2\sigma^2$, $2pz = iu$ entonces $z = iu\sigma^2$, para el exponente de la exponencial en la integral de (D.2) tenemos,

$$\begin{aligned} -x^2/2\sigma^2 - iux &= -px^2 - 2pzx - pz^2 + pz^2 = \\ -x^2/2\sigma^2 - iux + u^2\sigma^2/2 - u^2\sigma^2/2 \end{aligned} \quad (D.4)$$

por tanto con la transformación de (D.4)

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(x+z)^2} e^{-u^2\sigma^2/2} dx = \frac{e^{-u^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(x+z)^2} dx = \\ &\frac{e^{-u^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sqrt{2\pi\sigma} = e^{-u^2\sigma^2/2} \end{aligned} \quad (D.5)$$

Una vez que hemos obtenido la función de transferencia para la Gaussiana, la función de transferencia para la diferencia de dos Gaussianas con diferentes desviaciones típicas σ_1 y σ_2 se obtiene de forma inmediata,

$$DOG(u) = e^{-u^2\sigma_1^2/2} \left(1 - e^{-u^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2} \right) \quad (D.6)$$

Aplicando este mismo resultado al caso bidimensional, que es el dominio de las funciones imagen, obtenemos

$$DOG(u, v) = e^{-(u+v)^2\sigma_1^2/2} \left(1 - e^{-(u+v)^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2} \right) \quad (D.7)$$

D.2 Función de transferencia de la Laplaciana de la Gaussiana

La transformada de Fourier en el caso *n-dimensional* donde tanto x como k se caracterizan también por ser *n-dimensionales*,

$$G(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/n} \sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n \mathbf{x} \quad (\text{D.8})$$

por consiguiente, para el caso de dos variables $n = 2$, $\mathbf{k} = (u, v)$ y $\mathbf{x} = (x, y)$, que es el que nos ocupa, tendremos,

$$G(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-iux} dx \right] e^{-iv y} \quad (\text{D.9})$$

Se trata de aplicar (D.9) a la Laplaciana de la Gaussiana dada en (D.10)

$$\begin{aligned} g(x, y) = \nabla^2 G(x, y) &= K \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) e^{-(x^2 + y^2)/2\sigma^2} = \\ K_1 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) e^{-(x^2 + y^2)/2\sigma^2} &= K_2 \left[\left(1 - \frac{y^2}{2\sigma^2} \right) - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right] e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

llamemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-iux} dx = \\ K_1 e^{-y^2/2\sigma^2} &\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - y^2/2\sigma^2 \right) e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-iux} dx - \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-iux} dx \right] \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

debido a la complejidad matemática realizaremos el cálculo de las diferentes integrales de forma separada.

Consideremos la primera integral de (D.11) y las ecuaciones (D.3) a (D.5) para resolverla

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - y^2/2\sigma^2 \right) e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-iux} dx = \left(1 - y^2/2\sigma^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-iux} dx = \\ &\left(1 - y^2/2\sigma^2 \right) e^{-u^2\sigma^2/2} \sqrt{2\pi}\sigma \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Vamos a resolver ahora la segunda integral de (D.11),

$$I_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-iux} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+i u\sigma^2)^2} e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}} dx \quad (\text{D.13})$$

Antes de resolver la integral I_{12} vamos a realizar un cambio de variable como sigue

$$x + iu\sigma^2 = r; \quad x = r - iu\sigma^2; \quad x^2 = r^2 - u^2\sigma^4 - 2iu\sigma^2 r; \quad dx = dr \quad (D.14)$$

También vamos a necesitar hacer uso de la teoría de los momentos ordinarios (Bendat y Piersol 1971), a saber,

$$m_n = \frac{1}{c\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2/c^2} dt = \begin{cases} 1 \cdot 3 \dots (n-1) c^n / \sqrt{2^n} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases} \quad (D.15)$$

Por consiguiente,

$$I_{12} = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 e^{-r^2/2\sigma^2} dr - u^2\sigma^4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2/2\sigma^2} dr - 2iu\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} r e^{-r^2/2\sigma^2} dr \quad (D.16)$$

$$I_{121} = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 e^{-r^2/2\sigma^2} dr \underset{\substack{c=\sqrt{2}\sigma \\ n=2}}{=} \sigma^3 \sqrt{2\pi} \quad (D.17)$$

$$I_{122} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2/2\sigma^2} dr = \sqrt{2\pi}\sigma \quad (D.18)$$

$$I_{123} = \int_{-\infty}^{+\infty} r e^{-r^2/2\sigma^2} dr \underset{n \text{ impar}}{=} 0 \quad (D.19)$$

Finalmente, I_{12} resulta

$$I_{12} = e^{-u^2\sigma^2/2} (\sigma^2 - u^2\sigma^4) \sqrt{2\pi}\sigma \quad (D.20)$$

Con los cálculos realizados hasta el momento, podemos obtener I_1

$$I_1 = K_1 e^{-y^2/2\sigma^2} \left[(1 - y^2/2\sigma^2) e^{-u^2\sigma^2/2} \sqrt{2\pi}\sigma - (1/2\sigma^2) e^{-u^2\sigma^2/2} (\sigma^2 - u^2\sigma^4) \sqrt{2\pi}\sigma \right] = \quad (D.21)$$

$$K_2 e^{-u^2\sigma^2/2} e^{-y^2/2\sigma^2} (1 + u^2\sigma^2 - y^2/\sigma^2)$$

Ahora consideremos,

$$I_2 = K_3 \int_{-\infty}^{+\infty} I_1 e^{-ivy} dy = e^{-u^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + u^2\sigma^2 - y^2/\sigma^2) e^{-y^2/2\sigma^2} e^{-ivy} dy \quad (D.22)$$

Separando la integral I_2 en otras dos integrales y procediendo como antes,

$$I_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + u^2 \sigma^2) e^{-y^2/2\sigma^2} e^{-ivy} dy = (1 + u^2 \sigma^2) e^{-v^2 \sigma^2/2} \sqrt{2\pi} \sigma \quad (\text{D.23})$$

$$I_{22} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2/2\sigma^2} e^{-ivy} dy = e^{-v^2 \sigma^2/2} (\sigma^2 - v^2 \sigma^4) \sqrt{2\pi} \sigma \quad (\text{D.24})$$

Considerando (D.23) y (D.24) obtenemos

$$I_2 = K_4 (u^2 + v^2) e^{-(u^2 + v^2) \sigma^2/2} \quad (\text{D.25})$$

Finalmente, la función de transferencia de la Laplaciana de la Gaussiana definida en (D.10) resulta ser,

$$G(u, v) = \alpha (u^2 + v^2) e^{-(u^2 + v^2) \sigma^2/2} \quad (\text{D.26})$$

Los términos constantes se van incorporando en los diferentes términos constantes K_1, K_2, K_3, K_4 para quedar reducidos definitivamente a una única constante α .

D.3 Filtros de Gabor

Un filtro de Gabor es un filtro paso banda que selecciona un cierto rango de longitudes de onda alrededor del centro de longitudes de onda dado por (u_0, v_0) . La función de transferencia del filtro de Gabor está dada por,

$$G(u, v) = \exp\left(-\pi\left((u - u_0)^2 + (v - v_0)^2\right)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\right) \quad (\text{D.27})$$

Los filtros vienen dados por la siguiente expresión

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x}\right) \exp(i\mathbf{k}^t \mathbf{x}) \quad (\text{D.28})$$

donde \mathbf{A} está compuesta por una matriz de parámetros \mathbf{P} diagonal y una matriz de rotación \mathbf{R} ,

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{R}^t = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_y^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{D.29})$$

con $\mathbf{x}' = (x, y)$. Eligiendo $\mathbf{k}' = [k_0 \cos \varphi, k_0 \sin \varphi]$ se obtiene un conjunto de filtros con diferentes frecuencias. Además se deben seleccionar los parámetros de la matriz \mathbf{P} para definir el ancho de banda.

La exponencial compleja dada en (D.28) puede descomponerse en una parte real y una imaginaria como sigue,

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x}\right) \cos(\mathbf{k}' \mathbf{x}) \quad (\text{D.30})$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x}\right) \sin(\mathbf{k}' \mathbf{x}) \quad (\text{D.31})$$

que origina las correspondientes oscilaciones del filtro. Variando el valor de k_0 se obtienen diferentes frecuencias de oscilación y con diferentes valores de φ se obtienen diferentes orientaciones del filtro. En la figura S.37(a) se muestra una representación 3D de la función de transferencia definida en (D.27) con origen en $(u_0, v_0) = (1.5, 1.5)$, mientras que S.37(b) y (c) se representa también en 3D la ecuación (D.30) para valores de φ iguales a 0° y 30° respectivamente.