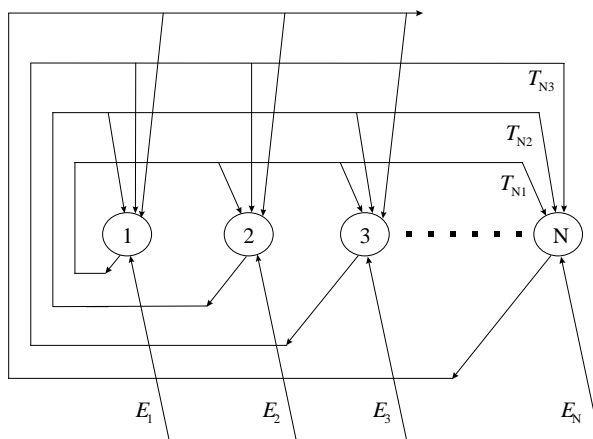


## APÉNDICE K

### K. FUNDAMENTOS DE LA RED NEURONAL DE HOPFIELD

De acuerdo a Yu y Tsai (1992) o Hilera y Martínez (1995), uno de los modelos de red neuronal más famoso con una sola capa es la red de Hopfield, desarrollada por Hopfield y Tank (1986).



*Figura K.1 Modelo de red neuronal de Hopfield*

La red de Hopfield es un modelo recurrente donde cada neurona de la red se encuentra conectada a todas las demás, pero no consigo misma, es decir, no hay conexiones auto-recurrentes. Además, los pesos asociados a las conexiones entre pares de neuronas son simétricos, esto significa que el peso de la conexión de una neurona  $i$  con otra neurona  $j$  es de igual valor que el de la conexión de la neurona  $j$  con la  $i$ . Si designamos a estos pesos como  $T$ , tendremos  $T_{ij} = T_{ji}$  para todo  $i$  y  $j$  y  $T_{ii}=0$ .

La entrada a la  $i$ -ésima neurona proviene de dos fuentes: entradas externas e internas procedentes de las otras neuronas. La entrada total  $u_i$  a la neurona  $i$  viene dada por,

$$u_i = \sum_{j \neq i} T_{ij} V_j + I_i \quad (\text{K.1})$$

donde el valor  $V_j$  representa la salida de la neurona  $j$ -ésima;  $T_{ij}$  es el peso de conexión entre las neuronas  $V_i$  y  $V_j$ ;  $I_i$  representa un valor de una entrada externa, que se usa para asignar el nivel de excitabilidad a través de dichas constantes. Existen dos clases de redes de Hopfield (Haykin, 1994), a saber: (a) analógicas, en las que el estado de las neuronas puede variar de forma continua entre 0 y 1, y (b) discretas en las que esos estados quedan restringidos a los valores binarios 0 y 1. El comportamiento de las redes binarias es que oscilan entre dos valores binarios, pudiendo lograr muchos estados estables locales. Hopfield ha demostrado que las redes analógicas se comportan mejor, ya que la superficie de la función de energía durante el proceso de minimización se presenta de una forma suave sin oscilaciones y evita los mínimos locales.

Para redes analógicas de Hopfield, la entrada total a una neurona se convierte en un valor de salida por sendas funciones de activación, de tipo escalón en el caso discreto y sigmoidal en el analógico.

La evolución de una neurona en el caso analógico se define por,

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j \neq i} T_{ij} V_j + I_i$$

donde

(K.2)

$$V_j = g_j(u_j) \quad \forall j$$

$g_j(u_j)$  es la función sigmoidal de activación de la neurona  $j$ , y  $R_i$  es una constante de tiempo, que puede fijarse a 1 por simplicidad (Hopfield y Tank 1986; Yu y Tsai 1992). Se puede definir la función sigmoidal por la tangente hiperbólica  $g_j(u_j) = \tanh(\alpha u_j)$ , donde  $\alpha$  es un factor de ganancia y  $dt$  representa un incremento de tiempo.

Se define una cantidad, llamada energía, para describir el estado de la red como sigue,

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} T_{ij} V_i V_j - \sum_i V_i I_i \quad (\text{K.3})$$

De acuerdo con Haykin (1994), la evolución del modelo continuo de Hopfield descrito por el sistema de la ecuación diferencial de primer orden no lineal de la ecuación (K.2) representa una trayectoria en el espacio de fase que busca el mínimo de la función de Liapunov  $E$ .

Respecto de la dinámica de la red, Cohen y Grossberg (1983) demuestran que la ecuación que gobierna la evolución de la red de Hopfield con conexiones simétricas y no auto-recurrentes converge hacia estados estables. La ecuación (K.2) describe la red, la entrada total a la neurona  $u_{ij}$  se obtiene resolviendo la ecuación (K.2) con el método de Runge-Kutta. Finalmente el estado  $V_{ij}$  también se obtiene de acuerdo a la ecuación (K.2) y la función tangente hiperbólica.