

## APÉNDICE C

---

### C. COMPORTAMIENTO DE LOS OPERADORES DERIVADA FRENTE AL RUIDO

Para la reducción del ruido de una imagen es necesario muchas veces utilizar un filtro paso bajo, y para detectar los contornos utilizamos operadores derivadas, que en algunos casos son filtros paso alto. Estas cuestiones se han puesto de manifiesto en los Capítulos 2, 4 y 6.

El objetivo consiste en determinar el orden en el que deben realizarse estas operaciones para que el degradado de la imagen sea mínimo. Un estudio pormenorizado de lo expuesto aquí se puede encontrar en Mazo y col. (1996).

#### C.1 Comportamiento del operador gradiente frente al ruido

Dada una imagen  $f(x,y)$  se definen las derivadas en las direcciones espaciales  $x$  e  $y$  como sigue,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= f(x,y) - f(x-1,y) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= f(x,y) - f(x,y-1)\end{aligned}\tag{C.1}$$

Considerando que el nivel de gris de la imagen es constante, por tanto no existen bordes, y que la imagen está contaminada por ruido, se tiene,

$$f(x, y) = k + n(x, y) \quad (C.2)$$

donde  $k$  representa el nivel constante y  $n(x, y)$  es el ruido en cada píxel, que se modela como ruido blanco gaussiano independiente del nivel de gris de la imagen. Es decir se trata de un ruido gaussiano con media cero y desviación típica  $\sigma$  (ver Capítulo 20 para más detalles sobre el ruido).

El valor medio se define como sigue

$$E[n(x, y)] = 0 \quad (C.3)$$

mientras que la varianza viene dada por el valor medio del cuadrado del ruido sobre su valor medio

$$E\left[\left(n(x, y) - E[n(x, y)]\right)^2\right] = \sigma^2 \quad (C.4)$$

Dada la independencia del ruido respecto del nivel de gris de la imagen, se tiene

$$E[n(x, y)n(x+s, y+t)] = E[n(x, y)]E[n(x+s, y+t)] = 0$$

(C.5)

siendo  $|s| + |t| \neq 0$

Para el tratamiento y modelado de variables aleatorias ver por ejemplo el libro de Bendat y Piersol (1971).

El vector gradiente de la imagen ruidosa  $f(x, y)$  dada en la ecuación (C.2) es,

$$\nabla(f(x, y)) = \left[ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] = [n(x, y) - n(x-1, y), n(x, y) - n(x, y-1)] \quad (C.6)$$

y por tanto, su módulo es

$$\left| \nabla(f(x, y)) \right|^2 = [n(x, y) - n(x-1, y)]^2 + [n(x, y) - n(x, y-1)]^2 \quad (C.7)$$

desarrollando la ecuación (C.7), se obtiene,

$$\begin{aligned} \left| \nabla(f(x, y)) \right|^2 = & n^2(x, y) + n^2(x-1, y) - 2n(x, y)n(x-1, y) + \\ & n^2(x, y) + n^2(x, y-1) - 2n(x, y)n(x, y-1) \end{aligned} \quad (C.8)$$

Sabemos de la teoría de variables aleatorias y para el caso que estamos tratando que,

$$E[n^2(x, y)] = E[n^2(x-1, y)] = E[n^2(x, y-1)] = \sigma^2 \quad (C.9)$$

Por consiguiente, utilizando (C.5) y (C.9) la ecuación (C.8) resulta

$$\left| \nabla(f(x, y)) \right|^2 = 4\sigma^2 \quad (C.10)$$

La ecuación (C.10) nos indica que el valor del gradiente en un punto de nivel de gris uniforme es proporcional a la varianza del ruido añadido a la imagen. Puesto que para detectar un contorno se compara el valor del gradiente con un determinado umbral, cuanto mayor sea la varianza del ruido, mayor es la probabilidad de detectar falsos contornos.

## C.2 Comportamiento del operador Laplaciana frente al ruido

De acuerdo a la ecuación (6.15), el operador Laplaciana puede definirse como sigue,

$$\begin{aligned} L[f(x, y)] = \nabla^2 f(x, y) = & 4n(x, y) - n(x-1, y) - \\ & n(x+1, y) - n(x, y-1) - n(x, y+1) \end{aligned} \quad (C.11)$$

La Laplaciana es una variable aleatoria con valor medio nulo

$$\begin{aligned} E[L[f(x, y)]] = & 4E[n(x, y)] - E[n(x-1, y)] - \\ & E[n(x+1, y)] - E[n(x, y-1)] - E[n(x, y+1)] = 0 \end{aligned} \quad (C.12)$$

y varianza

$$\begin{aligned} V[L[f(x, y)]] = & E\left[\left(L[f(x, y)] - E[L[f(x, y)]]\right)^2\right] = E\left[\left(L[f(x, y)]\right)^2\right] = \\ & E\left[16n^2(x, y) + n^2(x-1, y) + n^2(x+1, y) + n^2(x, y-1) + n^2(x, y+1) \right. \\ & \left. + n(x, y)n(x-1, y) + \dots\right] = 20\sigma^2 \end{aligned} \quad (C.13)$$

El resultado de aplicar el operador Laplaciana a la imagen genera un valor medio cero, y una varianza distinta de cero, lo que indica que cambia de signo, dando lugar a la detección de falsos contornos.

### C.3 Reducción de la sensibilidad al ruido

Antes de procesar la imagen con una máscara basada en derivadas, se hace un promediado de la misma con el núcleo del filtro dado en la ecuación (4.2). El resultado después del filtrado es el siguiente

$$\bar{f}(x, y) = \frac{k}{9} + \frac{1}{9} \left[ n(x-1, y-1) + n(x-1, y) + n(x-1, y+1) + n(x, y-1) + n(x, y) + n(x, y+1) + n(x+1, y-1) + n(x+1, y) + n(x+1, y+1) \right] \quad (C.14)$$

$$\bar{f}(x-1, y) = \frac{k}{9} + \frac{1}{9} \left[ n(x-2, y-1) + n(x-2, y) + n(x-2, y+1) + n(x-1, y-1) + n(x-1, y) + n(x-1, y+1) + n(x, y-1) + n(x, y) + n(x, y+1) \right] \quad (C.15)$$

$$\bar{f}(x, y-1) = \frac{k}{9} + \frac{1}{9} \left[ n(x-1, y-2) + n(x-1, y-1) + n(x-1, y) + n(x, y-2) + n(x, y-1) + n(x, y) + n(x+1, y-2) + n(x+1, y-1) + n(x+1, y) \right] \quad (C.16)$$

$$\bar{f}(x+1, y) = \frac{k}{9} + \frac{1}{9} \left[ n(x, y-1) + n(x, y) + n(x, y+1) + n(x+1, y-1) + n(x+1, y) + n(x+1, y+1) + n(x+2, y-1) + n(x+2, y) + n(x+2, y+1) \right] \quad (C.17)$$

$$\bar{f}(x, y+1) = \frac{k}{9} + \frac{1}{9} \left[ n(x-1, y) + n(x-1, y+1) + n(x-1, y+2) + n(x, y) + n(x, y+1) + n(x, y+2) + n(x+1, y) + n(x+1, y+1) + n(x+1, y+2) \right] \quad (C.18)$$

El módulo del gradiente aplicado sobre la imagen promediada es,

$$\begin{aligned} |\nabla \bar{f}(x, y)|^2 &= [\bar{f}(x, y) - \bar{f}(x-1, y)]^2 + [\bar{f}(x, y) - \bar{f}(x, y-1)]^2 = \\ & \left[ \frac{1}{9} \left[ n(x+1, y) + n(x+1, y-1) + n(x+1, y+1) - n(x-2, y-1) - \right. \right. \\ & \left. \left. n(x-2, y) - n(x-2, y+1) \right] \right]^2 + \left[ \frac{1}{9} \left[ n(x, y+1) + n(x-1, y+1) + \right. \right. \\ & \left. \left. n(x+1, y+1) - n(x, y-2) - n(x-1, y-2) - n(x+1, y-2) \right] \right]^2 = \frac{12}{81} \sigma^2 \end{aligned} \quad (C.19)$$

con lo que se demuestra que se produce una gran reducción en la sensibilidad al ruido.

Si se filtra la imagen promedio con una máscara Laplaciana, se obtiene el siguiente resultado,

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{2}{9}n(x-1, y-1) + \frac{1}{9}n(x-1, y) + \frac{2}{9}n(x-1, y+1) + \frac{1}{9}n(x, y-1) + \\
 & \frac{1}{9}n(x, y+1) + \frac{2}{9}n(x+1, y-1) + \frac{1}{9}n(x+1, y) + \frac{2}{9}n(x+1, y+1) - \frac{1}{9}n(x-1, y+2) - \\
 & \frac{1}{9}n(x, y+2) - \frac{1}{9}n(x+1, y+2) - \frac{1}{9}n(x-2, y-1) - \frac{1}{9}n(x-2, y) - \frac{1}{9}n(x-2, y+1) - \\
 & \frac{1}{9}n(x-1, y-2) - \frac{1}{9}n(x, y-2) - \frac{1}{9}n(x+1, y-2) - \frac{1}{9}n(x+2, y-1) - \frac{1}{9}n(x+2, y) - \\
 & \frac{1}{9}n(x+2, y+1) - \frac{1}{9}n(x-2, y)
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

El valor medio del resultado es nulo, su varianza resulta

$$\begin{aligned}
 V[R] = E[(R - \bar{R})^2] = E[R^2] = E[ & \frac{4}{81}n^2(x-1, y-1) + \frac{1}{81}n^2(x-1, y) + \frac{2}{81}n^2(x-1, y+1) + \\
 & \frac{1}{81}n^2(x, y-1) + \frac{1}{81}n^2(x, y+1) + \frac{4}{81}n^2(x+1, y-1) + \frac{1}{81}n^2(x+1, y) + \frac{4}{81}n^2(x+1, y+1) + \\
 & \frac{1}{81}n^2(x-1, y+2) + \frac{1}{81}n^2(x, y+2) + \frac{1}{81}n^2(x+1, y+2) + \frac{1}{81}n^2(x-2, y-1) + \frac{1}{81}n^2(x-2, y+1) + \\
 & \frac{1}{81}n^2(x-1, y-2) + \frac{1}{81}n^2(x, y-2) + \frac{1}{81}n^2(x+1, y-2) + \frac{1}{81}n^2(x-2, y) \dots ] = \frac{32}{81}\sigma^2
 \end{aligned} \tag{C.21}$$

A la vista del resultado podemos concluir que en este caso también se consigue una reducción en el número de falsos contornos al ser menor el valor de la varianza.