

APÉNDICE G

G. SUPERFICIES: GEOMETRÍA DIFERENCIAL E IMÁGENES GAUSSIANAS EXTENDIDAS

G.1 GEOMETRÍA DIFERENCIAL

TANGENTE A LA SUPERFICIE, NORMAL Y ÁREA

Consideremos una superficie paramétrica, $\mathbf{S}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^t$ y un punto P en \mathbf{S} . Se supone que todas las primeras y segundas derivadas de \mathbf{S} con respecto a u y v existen en P . El *plano tangente* en P se identifica por los dos vectores $\mathbf{S}_u = \partial \mathbf{S} / \partial u$ y $\mathbf{S}_v = \partial \mathbf{S} / \partial v$.

La *normal a la superficie* es el vector unitario perpendicular al plano tangente de \mathbf{S} en P , esto es,

$$\mathbf{n}_s(P) = \frac{\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v}{\|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\|} \quad (\text{G.1})$$

Las imágenes tanto de intensidad como de alcance, normalmente corresponden a una parametrización $S(x, y) = -[x, y, f(x, y)]^t$. En este caso, $\mathbf{S}_x = -[1, 0, f_x]$ y $\mathbf{S}_y = -[0, 1, f_y]$ con lo cual,

$$\mathbf{n}_s(P) = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad (\text{G.2})$$

donde $f_r = \partial f / \partial r$.

Suele ser útil saber cómo obtener el área de una superficie en su forma paramétrica general y particular,

$$A_s = \iint_S \|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\| dudv \quad \text{o bien} \quad A_s = \iint_S \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (\text{G.3})$$

CURVATURA DE SUPERFICIES

Curvatura a partir de los vectores normales a la superficie

La normal a la superficie en un punto P viene dada por la ecuación (G.1), que por simplicidad notacional designaremos como \mathbf{n}_p . A partir de ahora designamos a los puntos (píxeles) indistintamente con letras mayúsculas y minúsculas dependiendo del contexto. El concepto de curvatura introducido aquí se fundamenta en determinar cuál es la variación en la normal según nos movemos de una punto p a un punto q . En superficies discretas hablamos de la curvatura según nos movemos del píxel p al píxel q , y la definimos como,

$$\kappa(p, q) = \frac{\|\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_q\|}{\|p - q\|} s(p, q) \quad (\text{G.4})$$

donde $\|\cdot\|$ es la distancia Euclídea desde el origen en el espacio 3D, y $s(p, q)$ es un factor de signo que toma el valor 1 o -1 para indicar si la curvatura es positiva o negativa. Para aclarar el concepto de curvatura positiva o negativa nos referimos a la figura G.1, donde en la parte (a) se ilustra la curvatura positiva y negativa de forma gráfica y en (b) la geometría de la curvatura positiva.

A partir de la figura G.1 (b) se determina el signo de la curvatura, donde t es un escalar:

$$s(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|a\| - \|b\| \geq 0 \\ -1 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (\text{G.5})$$

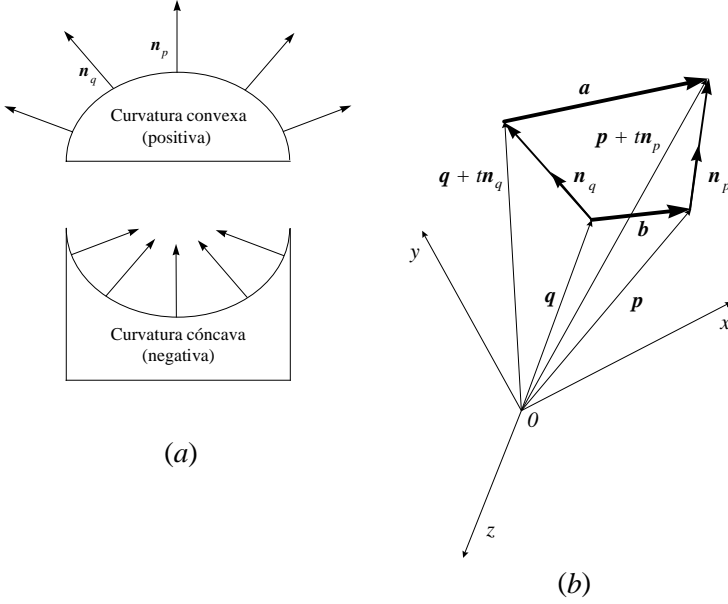


Figura G.1 (a) Ilustración de curvatura positiva y negativa; (b) geometría de la curvatura positiva

Por consiguiente, si las dos perpendiculares n_p y n_q divergen a partir de los píxeles p y q la curvatura se clasifica como positiva (indicando convexidad) en caso contrario la curvatura es negativa (indicando concavidad).

Utilizando $\kappa(p, q)$ se pueden definir seis medidas de curvatura. Si definimos $\Omega(p)$ como una vecindad alrededor del píxel p , por ejemplo una vecindad de dimensión 3×3 , las seis medidas de curvatura son:

Curvatura promediada en p ,

$$\kappa_p = \frac{1}{|\Omega(p)|} \sum_{q \in \Omega(p)} \kappa(p, q) \quad (\text{G.6})$$

Curvatura mínima en p ,

$$\kappa_1 = \kappa(p, q_0) \quad \text{donde} \quad |\kappa(p, q_0)| = \min_{q \in \Omega(p)} |\kappa(p, q)| \quad (\text{G.7})$$

Curvatura máxima en p ,

$$\kappa_2 = \kappa(p, q_0) \quad \text{donde} \quad |\kappa(p, q_0)| = \max_{q \in \Omega(p)} |\kappa(p, q)| \quad (\text{G.8})$$

Curvatura media en p ,

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad (\text{G.9})$$

Curvatura Gaussiana en p ,

$$G = \kappa_1 \kappa_2 \quad (\text{G.10})$$

Razón de Curvatura en p ,

$$R = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \quad (\text{G.11})$$

CURVATURA A PARTIR DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Extendemos la definición de curvatura de una curva para definir la curvatura de una superficie. La curvatura de una curva paramétrica $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ con t un parámetro, está dada en cada punto por,

$$\kappa(t) = \frac{x' y'' - x'' y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{G.12})$$

donde $\alpha' = d\alpha/dt$. Para la parametrización común $\alpha(x) = (x, f(x))^t$, es decir considerando $y(x) = f(x)$, la curvatura resulta

$$\kappa = \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}} \quad (\text{G.13})$$

Consideremos una curva C en S que pasa a través de P , se define la *curvatura normal* de C en P como

$$\kappa^N = \kappa \cos \theta \quad (\text{G.14})$$

donde κ es la curvatura de C en P y θ es el ángulo formado por el vector perpendicular a la superficie en P , $\mathbf{n}_S(P)$ con el vector normal a la curva $\mathbf{n}_C(P)$.

Se puede demostrar que κ^N no depende de la curva particular C elegida, sino sólo de la tangente de C en P , identificada por el vector unitario \mathbf{d} , esto nos permite hablar de *curvatura normal a lo largo de una dirección*. Por tanto, se puede elegir C como la curva obtenida por intersección de \mathbf{S} con un plano que pasa por P y contiene tanto a \mathbf{d} como a $\mathbf{n}_s(P)$. En este caso, C es una sección de corte de S a lo largo de \mathbf{d} y describe la forma de esa superficie a lo largo de esa dirección, en este caso particular $\kappa^N = \kappa$.

En el caso general, y con referencia a la figura G.2, la curvatura de la curva generada por la superficie \mathbf{S} y el plano de corte π en la dirección ϕ y en el punto P viene dada por

$$\kappa_\phi = \frac{f''_\phi}{(1 + f'^2_\phi)^{3/2}} \quad (\text{G.15})$$

por lo que la curvatura normal de la superficie en la dirección ϕ resulta,

$$\kappa^N_\phi = \kappa_\phi \cos \theta \quad (\text{G.16})$$

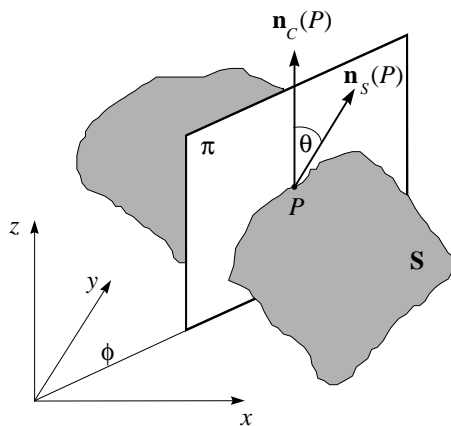


Figura G.2 Curvatura de Superficie

Sean p y q las primeras derivadas en P en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, es decir $f'_x = p$ y $f'_y = q$, la ecuación (G.2) puede reescribirse como,

$$\mathbf{N} = (p, q, -1) \quad (\text{G.17})$$

y el plano π se puede expresar como,

$$\pi: x \sin \phi - y \cos \phi + c = 0 \quad (\text{G.18})$$

donde c es una constante, y

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{p \sin \phi + q \cos \phi}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right) = \sqrt{\frac{1 + (p \cos \phi - q \sin \phi)^2}{1 + p^2 + q^2}} \quad (\text{G.19})$$

CURVATURAS PRINCIPALES Y DIRECCIONES

Se puede describir la forma local de S en P tomando las curvaturas normales en P en *todas* las direcciones. Esto resulta casi imposible, pero afortunadamente es innecesario. Suponemos conocidas las curvaturas normales mínima y máxima en P , κ_1 y κ_2 respectivamente, llamadas *curvaturas principales* y las correspondientes direcciones, \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 llamadas direcciones principales. Se puede demostrar que:

- 1) las direcciones principales son siempre ortogonales;
- 2) la curvatura normal a lo largo de cualquier dirección $\mathbf{v} = (\cos \gamma, \sin \gamma)$, donde γ es el ángulo de \mathbf{d}_1 a \mathbf{d} , puede obtenerse a partir de las dos curvaturas principales a través de la fórmula de Euler:

$$\kappa_\phi = \kappa_1 \cos^2 \gamma + \kappa_2 \sin^2 \gamma \quad (\text{G.20})$$

- 3) consecuentemente, la forma local de la superficie queda especificada completamente por las curvaturas y direcciones principales.

EQUIVALENCIA DE CURVATURAS

Se trata de demostrar que la obtención de las dos curvaturas principales κ_1 y κ_2 y su orientación α es equivalente a la obtención de la curvatura en las 4 direcciones siguientes separadas 45° : κ_0 , κ_{45} , κ_{90} y κ_{135} . La figura G.3 ilustra esto geoméricamente para el caso en el que κ_1 y κ_2 son positivas.

A partir de (G.20) la obtención de la curvatura en cualquier dirección ϕ a partir de las curvaturas principales resulta,

$$\kappa_\phi = \kappa_1 \cos^2(\phi - \alpha) + \kappa_2 \sin^2(\phi - \alpha) \quad (\text{G.21})$$

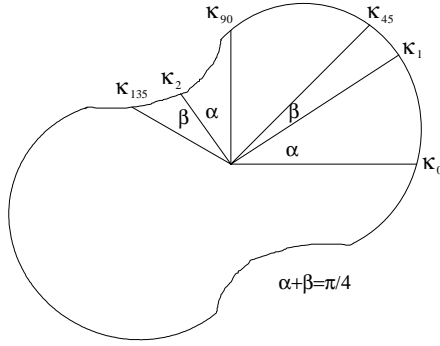


Figura G.3 Relación entre curvaturas principales y curvaturas direccionales

Para las cuatro direcciones dadas tenemos,

$$\kappa_0 = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha \quad (\text{G.22})$$

$$\kappa_{90} = \kappa_1 \sin^2 \alpha + \kappa_2 \cos^2 \alpha \quad (\text{G.23})$$

$$\kappa_{45} = \kappa_1 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \kappa_2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \quad (\text{G.24})$$

$$\kappa_{135} = \kappa_1 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \kappa_2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \quad (\text{G.25})$$

(G.24) y (G.25) pueden reescribirse como

$$2\kappa_{45} = \kappa_1 + \kappa_2 + (\kappa_1 - \kappa_2) \sin(2\alpha) \quad (\text{G.26})$$

$$2\kappa_{135} = \kappa_1 + \kappa_2 - (\kappa_1 - \kappa_2) \sin(2\alpha) \quad (\text{G.27})$$

Sumando desde (G.22) a (G.27), obtenemos,

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{2} (\kappa_0 + \kappa_{45} + \kappa_{90} + \kappa_{135}) \quad (\text{G.28})$$

Multiplicando (G.22) por (G.23) y (G.24) por (G.25)

$$\begin{aligned} \kappa_0 \kappa_{90} &= \kappa_1 \kappa_2 (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ &= \kappa_1 \kappa_2 + (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \kappa_1 \kappa_2 + \frac{1}{4} (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \sin^2 2\alpha \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{45}\kappa_{135} &= \kappa_1\kappa_2 \left(\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right) + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\
&= \kappa_1\kappa_2 + (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \kappa_1\kappa_2 + \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \quad (G.30) \\
&= \kappa_1\kappa_2 + \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \cos^2 2\alpha
\end{aligned}$$

Sumando (G.29) y (G.30) y multiplicando por 4,

$$4(\kappa_0\kappa_{90} + \kappa_{45}\kappa_{135}) = 8\kappa_1\kappa_2 + (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) = 4\kappa_1\kappa_2 + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \quad (G.31)$$

Si hacemos $A = \kappa_1\kappa_2$ y $B = \kappa_1 + \kappa_2$, entonces κ_1 y κ_2 son soluciones de la ecuación,

$$x^2 - Bx + A = 0 \quad (G.32)$$

y por convención, tenemos $|\kappa_1| > |\kappa_2|$, lo que resta es encontrar el valor de $\alpha \bmod \pi$.

Reescribiendo (G.22)

$$\kappa_0 = \kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \sin^2 \alpha \quad (G.33)$$

nos da dos soluciones para α : α y $\pi - \alpha$.

Y con (G.25)

$$2\kappa_{45} = \kappa_1 + \kappa_2 + (\kappa_1 - \kappa_2) \sin(2\alpha) \quad (G.34)$$

nos da dos soluciones para α : α y $\frac{\pi}{2} - \alpha$. La intersección de esos dos conjuntos de ecuaciones nos da una única solución para $\alpha \bmod \pi$, donde *mod* es la operación matemática módulo.

G.2 IMÁGENES GAUSSIANAS EXTENDIDAS

Las imágenes Gaussianas extendidas constituyen un método de representar la forma de un objeto y su disposición en el espacio. Para lograr esto, primero describimos la imagen Gaussiana y luego definimos la curvatura Gaussiana. Los desarrollos expuestos en esta sección están basados en Horn (1986).

LA IMAGEN GAUSSIANA

Para reconocer objetos y determinar su disposición en el espacio, se debe disponer de un método para representar las formas de sus superficies. Una posibilidad consiste en proporcionar las distancias a las superficies, esta representación es lo que se conoce como mapa de profundidad y es el resultado de la visión estereoscópica.

Otra forma es mediante la imagen Gaussiana extendida. Volvamos a la representación de la esfera definida en la figura A.3 del Apéndice A. Imaginemos los vectores unitarios perpendiculares a cada elemento de superficie de un objeto, se puede proyectar cada uno de esos vectores en una esfera unidad, denominada *esfera Gaussiana*, encontrando el punto de la esfera cuya normal a la superficie de la esfera es la misma que el punto de la imagen original, ver figura G.4. De esta forma se puede trasladar información asociada con los puntos en la superficie a puntos de la esfera Gaussiana. En el caso de los objetos convexos, con curvatura positiva en todos los puntos, dos puntos no tienen la misma perpendicular a la superficie y por tanto cada punto en la esfera Gaussiana se corresponde con un único punto en la superficie. Este tipo de representación se denomina *imagen Gaussiana*.

Una propiedad útil de la imagen Gaussiana es que rota con el objeto. Una perpendicular a la superficie en la esfera que es paralela a una perpendicular determinada de la superficie del objeto será paralela a esta última cuando ambas sean rotadas. Una rotación del objeto corresponde a una rotación de la esfera Gaussiana.

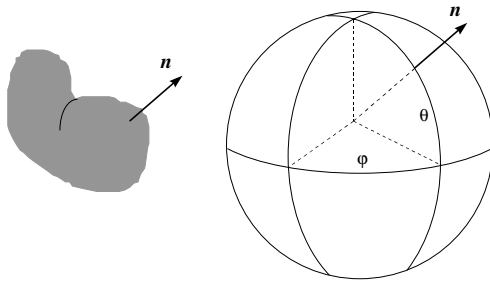


Figura G.4 La imagen de un punto en la superficie Gaussiana es el punto en la esfera unidad que tiene la misma orientación que la superficie

CURVATURA GAUSSIANA

Consideremos un elemento de área δO en el objeto, ver figura G.5, cada punto en este elemento de superficie corresponde a un punto particular en la esfera Gaussiana y por tanto dicho elemento se proyecta en un elemento δS en la esfera Gaussiana. Si la superficie aparece fuertemente curvada, las normales a la superficie de dicho elemento apuntarán en un amplio abanico de direcciones. Los correspondientes puntos en la esfera

Gaussiana también aparecerán en un amplio rango. Inversamente, si la superficie es plana, las perpendiculares a la superficie en el objeto serán paralelas y se proyectarán en un único punto.

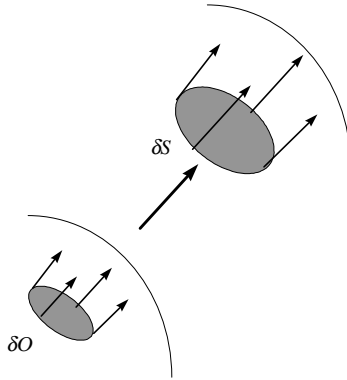


Figura G5 La imagen Gaussiana de un elemento de superficie es exactamente el conjunto de imágenes de los puntos en el elemento de superficie

Estas consideraciones sugieren una definición de curvatura. La *curvatura Gaussiana* K se define como el límite del cociente de las dos áreas cuando tienden a cero. Esto es,

$$K = \lim_{\delta O \rightarrow 0} \frac{\delta S}{\delta O} = \frac{dS}{dO} \quad (\text{G.35})$$

A partir de esta relación diferencial se pueden obtener dos integrales útiles. Consideremos primero la integración sobre una superficie O finita en el objeto,

$$\iint_O K dO = \iint_S dS = S \quad (\text{G.36})$$

donde S es la superficie del elemento de superficie en la esfera Gaussiana. La expresión a la izquierda se denomina *curvatura integral*. Esta relación nos permite tratar con superficies que presentan discontinuidades en las normales.

Ahora considerar la integral sobre el elemento de superficie S en la esfera Gaussiana,

$$\iint_S 1/K dS = \iint_O dO \quad (\text{G.37})$$

donde O es el área del correspondiente elemento de superficie en el objeto. Esta relación sugiere el uso de la curvatura Gaussiana inversa en la definición de la imagen Gaussiana extendida. También muestra que la integral de $1/K$ sobre la esfera Gaussiana es justo el área total del objeto.

IMAGEN GAUSSIANA EXTENDIDA

Se puede definir una proyección de forma que se asocie la inversa de la curvatura Gaussiana en un punto en la superficie con el correspondiente punto en la esfera unidad. Sean u y v los parámetros utilizados para especificar los puntos en la superficie original. Del mismo modo, sean θ y φ los parámetros utilizados para especificar los puntos en la esfera Gaussiana (latitud y longitud). Definimos la *imagen Gaussiana extendida* como,

$$G(\theta, \varphi) = \frac{1}{K(u, v)} \quad (\text{G.38})$$

donde (θ, φ) es el punto en la esfera Gaussiana correspondiente al punto (u, v) en la superficie original. Se puede demostrar que esta proyección es única para objetos convexos.

Considerar la observación de un objeto convexo (a una larga distancia) a partir de una dirección dada por el vector unitario \mathbf{v} . Un elemento de superficie con vector unitario normal \mathbf{s} , será visible sólo si $\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \geq 0$. Supongamos que el área de su superficie es δO . Debido al escorizado aparecerá ante el observador como un elemento de área $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v})\delta O$ perpendicular a \mathbf{v} , ver figura G.6.

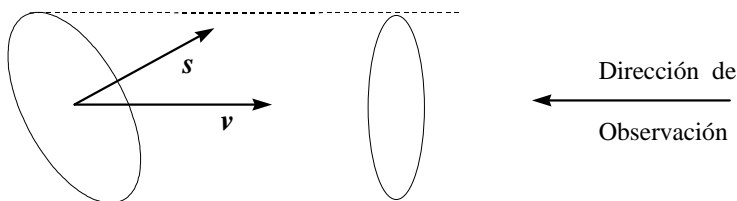


Figura G.6 Un elemento de superficie inclinado con respecto a la dirección de vista aparece escorizado

Sea $H(\mathbf{v})$ el hemisferio unidad para el cual $\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \geq 0$. Por tanto, el área aparente de la superficie es

$$\iint_{H(\mathbf{v})} G(\mathbf{s})(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (\text{G.39})$$

cuando se observa desde la dirección \mathbf{v} . Esto debería ser lo mismo que el área aparente cuando el objeto se observa desde la dirección opuesta, esto es,

$$\iint_{H(-\mathbf{v})} G(s)(s \cdot -\mathbf{v})dS \quad (\text{G.40})$$

Por tanto,

$$\iint_S G(s)(s \cdot \mathbf{v})dS = \mathbf{v} \cdot \iint_S G(s)(s)dS = 0 \quad (\text{G.41})$$

donde la integral ahora se toma sobre la esfera total. Puesto que este resultado es cierto para todos los vectores de observación \mathbf{v} , debemos tener,

$$\iint_S G(s)(s)dS = \mathbf{0} \quad (\text{G.42})$$

Es decir, el centro de masas de la imagen Gaussiana extendida está en el origen. Este resultado no es práctico porque generalmente sólo podemos ver un lado del objeto.

Otra propiedad de la imagen Gaussiana extendida es que la masa total de la imagen Gaussiana extendida es igual al área total de la superficie del objeto. Si queremos tratar con objetos de la misma forma pero de diferente dimensión, podemos normalizar la imagen Gaussiana extendida dividiéndola por la masa total.

Se puede pensar en la imagen Gaussiana extendida en términos de una densidad de masa en la esfera unidad. Resulta entonces apropiado tratar con los lugares en la superficie donde la curvatura Gaussiana es cero utilizando la integral $1/K$ mostrada anteriormente. Una región plana corresponde a una masa puntual por ejemplo. Esto proporciona una función impulso en la esfera Gaussiana con volumen proporcional al área de la región plana. El volumen bajo una función definida en la esfera es justo la integral de la función tomada sobre la superficie de la esfera.

Cuando la superficie es no convexa ocurren tres cosas:

- 1) La curvatura Gaussiana para algunos puntos será negativa.
- 2) Más de un punto en el objeto contribuirá a un mismo punto dado en la esfera.
- 3) Ciertas partes del objeto pueden ocultar a otras partes.

Finalmente, en Horn (1986) se pueden encontrar ejemplos de imágenes extendidas Gaussianas tales como la imagen de una esfera de radio R o de un volumen

toroidal. Así como diferentes desarrollos matemático-geométricos para deducir la expresión de la curvatura Gaussiana.