

1

Utilización de los números para la resolución de problemas

1.1 SISTEMA POSICIONAL DE NUMERACIÓN DECIMAL

Un SISTEMA DE NUMERACIÓN es el **conjunto de normas** que nos permiten **contar** los elementos de un conjunto **y escribir su número**. Hay muchos sistemas de numeración. Todos se fundan en la **agrupación** de los elementos que vayamos a contar. El número de unidades que se agrupan se denomina **base del sistema**.

El sistema de base dos realiza agrupamientos de dos en dos. El sistema de base tres hace agrupamientos de tres en tres, etc.

El sistema que manejamos habitualmente agrupa los elementos de **diez en diez**. Es el sistema de base 10 o **SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL**.

El sistema de numeración decimal procede de la India y fue introducido en Europa por los árabes (España, 711).

Se llama decimal o de base 10 porque **cuenta** los objetos agrupándolos **de 10 en 10**, además, utiliza **diez símbolos**, llamados cifras o guarismos, que son.

0 (cero)	2 (dos)	4 (cuatro)	6 (seis)	8 (ocho)
1 (uno)	3 (tres)	5 (cinco)	7 (siete)	9 (nueve)

1.1.1 UNIDADES, DECENAS Y CENTENAS

La relación decimal que existe entre las diversas unidades que forman el sistema de numeración decimal es:

10 unidades forman 1 decena 10 centenas forman 1 millar

10 decenas forman 1 centena 10 millares forman 1 decena de millar, etc.



Unidad



Decena

...

...

Cada diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior.

1.1.2 CLASES Y ÓRDENES DE UNIDADES

En cualquier número, la cifra que ocupa el **primer lugar** de la derecha corresponde a las **unidades**. El **segundo lugar** corresponde a las **decenas**. El **tercer lugar** corresponde a las **centenas**. El **cuarto lugar** corresponde a las **unidades de mil**, etc.

...1892

... unidades de mil centenas decenas unidades

Cada lugar a la izquierda tiene un valor 10 veces mayor que el de la derecha. Cada lugar equivale a un **orden**. Cada tres órdenes forman una **clase**. En el siguiente cuadro aparecen las clases, órdenes y unidades.

BILLONES	MILES DE MILLONES	MILLONES	MILES	UNIDADES	Clases
15° 14° 13°	12° 11° 10°	9° 8° 7°	6° 5° 4	3° 2° 1°	Ordenes
15° Centena de billón	12° Centena de millar de millón	9° Centena de millón	6° Centena de mil	3° Centenas	
14° Decena de billón	11° Decena de millar de millón	8° Decena de millón	5° Decena de mil	2° Decenas	
13° Unidad de billón	10° Unidad de millar de millón	7° Millón	4° Mil	1° Unidad	
N.º 523671025930145					

EJERCICIOS

1. ¿Qué es un sistema de numeración?
2. ¿Qué es la base del sistema? Enumérense clases de sistemas.
3. Qué es el sistema de numeración decimal.
4. Completa:

- a) 10 unidades forman...
- b) 10 decenas forman...
- c) 10...forman 1 decena de millar
- d) 10...forman 1 millar
- e) 10...forman 1 unidad de millón

5. Completa:

- a) Una centena es igual a...decenas
- b) Un millar es igual a...centenas
- c) Una decena de mil es igual a cien...
- d) Un millón es igual a...centenas

6. Contesta:

¿Cuántas centenas de mil tiene 1 millón?

¿Cuántos millares tienen 3 decenas de millar?

¿Cuántas centenas de millar tienen 2 millones?

7. Completa:

20 = 2 decenas

90 = ... decenas

10 decenas = ... centenas

100 = 1 centena

500 = ...centenas

10 centenas = ...millar

8. En los siguientes números, señala los diferentes órdenes:

Ejemplo: 1.234 → 1 unidad de mil + 2 centenas + 3 decenas + 4 unidades.

$$1000 + 200 + 30 + 4$$

23.453.625; 1.286.064.924; 53.307; 923.564; 345.568; 15.309.462.837

9. Contesta:

- a) ¿Cuántas unidades son 4 decenas de millón?
- b) ¿Cuántas unidades tiene 1 centena de millar?
- c) ¿Qué es mayor, 1 millón o 1000 millares?

10. Escribe con números:

- a) Doscientos trece unidades.
- b) Siete mil trescientas cinco unidades.
- c) Cinco mil diecisiete unidades.
- d) Noventa y tres mil quinientas tres unidades.
- e) Cuatrocientas treinta y ocho mil siete unidades.
- f) Mil diez unidades.

1.2 NÚMEROS NATURALES

Para contar las cosas y los individuos que nos rodean utilizamos los NÚMEROS NATURALES. Los números naturales son **infinitos**. Por eso requerimos un **sistema de numeración**, ya que no podemos usar un símbolo distinto para cada número, ya que precisaríamos infinitos símbolos.

Se llama **N** al conjunto de los **números naturales**.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

El conjunto **N** sirve para contar cuantos elementos tiene un conjunto.

Para escribir un número separamos mediante un punto grupos de tres cifras empezando por la derecha, salvo en los casos de millón (se pone un 1 pequeño), billón (un 2 pequeño), trillón (un 3 pequeño), etc.

Así el número 4596358 se escribe: **4,596.358**. Actualmente esta regla está en desuso, separándose cada tres cifras por un espacio en blanco: **4 596 358**. Este número se lee: **cuatro millones, quinientos noventa y seis mil, trescientos cincuenta y ocho**.

1.2.1 VALOR ABSOLUTO Y VALOR DE POSICIÓN

Toda cifra tiene dos valores: **valor absoluto** y **valor de posición**.

6.468

SEIS MIL	CUATROCIENTOS	SESENTA	OCHO	VALOR DE POSICIÓN
6	4	6	8	NÚMERO
SEIS	CUATRO	SEIS	OCHO	VALOR ABSOLUTO

- **VALOR DE POSICIÓN:** depende del lugar que ocupa la cifra en el número.
- **VALOR ABSOLUTO:** es el número de unidades simples que indica la cifra, independiente del lugar que ocupa.

1.2.1.1 Descomposición polinómica de números

Todo número se puede descomponer en forma de suma, como se observa en el siguiente ejemplo:

$$415.087 = 4 * 100.000 + 1 * 10.000 + 5 * 1.000 + 0 * 100 + 8 * 10 + 7$$

Esta descomposición se llama descomposición polinómica de un número.

Números ordinales

Los números ordinales se emplean para **“ordenar” los elementos de una serie**.

1.º Primero, 2.º segundo, 3.º tercero...10.º décimo, 11.º undécimo, 12.º duodécimo, 13.º decimotercero...20.º vigésimo, 21.º vigésimo primero...30.º trigésimo...40.º cuadragésimo...50.º quincuagésimo...60.º sexagésimo...70.º septuagésimo...80.º octogésimo...90.º nonagésimo...100.º centésimo...

A partir de 100 los números ordinales prácticamente no se utilizan.

EJERCICIOS



1. ¿Cómo se leen los siguientes números:

425.254.358

11.100.426

65.215

753.621.952

555.624.023

23.005.009

900.325.302

6.348.502

2. Señala el valor de posición del valor absoluto de los anteriores números.

3. Haz la descomposición polinómica de:

83.426

614.075

45.169.607

10.524.369

42.008

125.759

4. Escribe con letra los siguientes ordinales:

16°

28°

43°

52°

94°

72

68

5. Escribe con números:

- a) Trescientos cuarenta y cuatro millones treinta y ocho.
- b) Cinco billones doscientos mil quince.
- c) Catorce millones setecientos treinta mil trescientos tres.
- d) Cinco mil siete.
- e) Ochenta y cinco mil quinientos noventa y dos.
- f) Siete millones dos mil.

1.2.2 REPRESENTACIÓN Y COMPARACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Para **REPRESENTAR** gráficamente un número natural se emplea un **eje horizontal** segmentado, es el **eje de abscisas**, llamado **x**

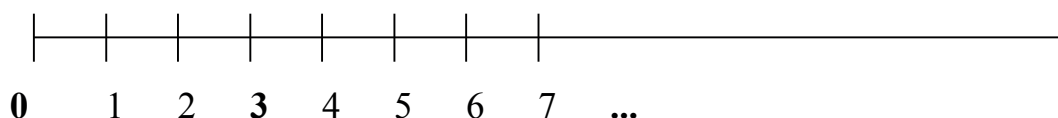
Para la representación se puede proceder así: se traza una recta y se señala un punto **0** que se llama **origen**.



Se elige una unidad de medida, por ejemplo, el segmento a la derecha de **0** el segmento **u**.



u. Se lleva sucesivamente



Así pues, para **representar** el **número tres**, se llevará **tres veces** hacia la **derecha** del origen **0**, el segmento **u**, obteniéndose el **punto 3**.

Para la **COMPARACIÓN** de dos números naturales se debe tener en cuenta que es el número **mayor** el número que está **más situado a la derecha** en la recta numérica.

Para **comparar** números **naturales** se emplean tres signos: **$>$, $<$, $=$**

El signo $>$ se lee “**mayor que**”, el signo $<$, se lee “**menor que**” y el signo $=$ se lee “**igual a**”

Ejemplo: $8 > 4 \rightarrow$ ocho **mayor que** cuatro; $6 < 9 \rightarrow$ seis **menor que** nueve; $7 = 7 \rightarrow$ siete **igual a** siete.

Para “**negar**” estos **signos** se cruza con una **rayita inclinada**.

Ejemplo: $3 \neq 5 \rightarrow$ tres no es igual a cinco.

1.2.3 OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS NATURALES

1.2.3.1 Adición

En una reunión hay 5 mujeres y 4 hombres. ¿Cuántas personas hay en total?

Habrán tantas personas como elementos tiene un grupo en unión al otro grupo.

5 mujeres unidas a 4 hombres = 9 personas.

Por tanto, 9 es la suma de 5 y 4.

Se escribe y se plantea la operación así:

$$5 \text{ (sumando)} + 4 \text{ (sumando)} = 9 \text{ (suma)}$$

Adición de números naturales es la operación de obtener la suma de números naturales.

1.2.3.1.1 Propiedades de la adición

Propiedad conmutativa.

La suma de dos números naturales no depende del orden de los sumandos.

Así, la suma $5 + 7$ y la suma $7 + 5$ son iguales $\rightarrow 5 + 7 = 12$; $7 + 5 = 12$

En general, si **a** y **b** son números naturales, se verifica que:

$$a + b = b + a$$

Ésta es la PROPIEDAD CONMUTATIVA de la suma de números naturales.

Propiedad asociativa

La suma de varios números naturales no depende de la forma en que se asocian.

Así, la suma $(7 + 5) + 4$ y la suma $7 + (5 + 4)$ son iguales.

$$(7 + 5) + 4 = 12 + 4 = 16$$

$$7 + (5 + 4) = 7 + 9 = 16$$

Si a , b y c son números naturales se verifica que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ésta es la PROPIEDAD ASOCIATIVA de la suma de números naturales.

Elemento neutro

La suma de cualquier número natural con el cero es el mismo número natural, es decir, **el cero es elemento neutro** en la suma de números naturales.

$$12 + 0 = 12$$

Si a es un número natural:

$$a + 0 = a$$

1.2.3.2 Resta (sustracción)

En una reunión de 13 estudiantes hay 8 chicas. ¿Cuántos chicos hay?

Se tienen los conjuntos $A = \{\text{chicas de la reunión}\}$ y $B = \{\text{chicos de la reunión}\}$

¿Se cumple $13 = 6 + ?$

Es decir, se da la suma y un sumando y se tiene que encontrar el otro sumando.

Al número 7 se la llama **diferencia** de 13 y 6.

Se escribe y se plantea la operación así:

$$13 \text{ (minuendo)} - 6 \text{ (sustraendo)} = 7 \text{ (diferencia)}$$

Sustracción: Operación contraria de la adición, en la que dada la suma y uno de los sumandos se tiene que encontrar el otro sumando.

1.2.3.2.1 Propiedades de la resta

$$10 - 7 = 3$$

$$a - b = c; a = b + c; a = c + b$$

En una resta si se suma al minuendo y al sustraendo el mismo número la diferencia no varía.

$$100 - 32 = 68$$

$$100 - (32 + 4) = 68 - 4 = 64$$

En una resta si se suma al sustraendo un número natural la diferencia viene restada por dicho número.

$$55 - 25 = 30$$

$$(55 + 3) - 25 = 33$$

En una resta si se suma un número al minuendo la diferencia viene sumada por dicho número.

EJERCICIOS



1. Completa las siguientes igualdades:

$$3 + 5 = 5 + \dots = 2 + \dots = 6 + \dots = 1 + \dots = 7 + \dots$$

$$13 + 25 = 25 + \dots = 12 + \dots = 6 + \dots = 8 + \dots = 10 + \dots$$

$$127 + 23 = 23 + \dots = 50 + \dots = \dots + \dots = \dots + \dots$$

2. Realiza las siguientes sumas:

$$1452 + 5210 + 25 + 56325$$

$$60 + 325 + 625 + 12586 + 102$$

$$125 + 36 + 25987 + 265109 + 326$$

$$2168 + 320 + 48 + 30 + 45939$$

$$2158 + 325 + 12560 + 325 + 2651$$

$$21 + 32569 + 3254 + 63258 + 75$$

3. Demuestra cómo se cumple la propiedad conmutativa de la adición con tres de las anteriores sumas.
4. Pon cinco ejemplos donde se cumpla la propiedad asociativa de la adición.
5. Realiza las siguientes restas:

$$825468325 - 236180$$

$$935697826 - 2651089$$

$$769531685 - 356284676$$

$$65800650 - 521009$$

$$60090053 - 102308$$

$$920348351 - 100035$$

6. Realiza y escribe en forma de suma las siguientes diferencias:

$$1334 - 136 = \dots; 14845 - 976 = \dots; 41768 - 3055 = \dots; 900160 - 10003 =$$

$$272 - 52 = \dots; 65893 - 3256 = \dots; 15863 - 6002 = \dots; 80000 - 6325 = \dots$$

7. Escribe en forma de diferencia las siguientes sumas y realícense.

$$12582 + 1258$$

$$12596 + 3259$$

$$75269 + 36548$$

$$12586 + 32687$$

$$95200 + 3658$$

$$600036 + 6326$$

8. Realiza mentalmente las siguientes operaciones:

$$48 + 10 - 20$$

$$199 + 15 - 30$$

$$200 - 15 + 50$$

$$100 - 25 + 40$$

$$300 + 50 - 15$$

$$1110 + 60 - 25$$

9. Suma o resta sin colocar en columna.

$$76 + 15 + 38$$

$$176 - 32$$

$$248 + 157 + 306$$

$$248 - 153$$

10. Calcula las siguientes operaciones.

$$(72 + 23) + (15 + 7)$$

$$36 + (17 + 10) + (34 + 12)$$

$$(30 + 12) + (15 + 16)$$

$$(476 + 175) + 8426 + 357)$$

$$476 + 17 - 25$$

$$63 - (25 - 8) - (12 - 3)$$

$$(768 - 157) - (36 + 54)$$

$$276 + (768 - 15) - 37$$

$$347 - (125 + 69)$$

11. En un jarro hay 197 aceitunas. Llega Juan y se cómo 37 y luego Cristina se come 25, pero su madre añade 17 aceitunas más ¿Cuántas aceitunas habrá al final en el jarro?
12. En un estanque caben 36000 litros de agua. El primer día se sacan 3232, el segundo 3624, el tercer día se reponen 14500 y el cuarto día se sacan 21451. ¿Cuánta agua queda?
13. Si un tren tarda 2 horas en hacer un viaje y han transcurrido 73 minutos de viaje, ¿Cuántos minutos faltan para llegar?

1.2.3.3 Multiplicación

Un coche tiene 4 ruedas. Hay cinco coches. Tendrán 20 ruedas.

La suma de 5 sumandos iguales a 4 se escribe

$$4 \text{ (multiplicando)} * 5 \text{ (multiplicador)} = 20 \text{ (producto)}$$

También a 4 y 5 se les llama **factores**.

Multiplicación es la operación de sumar sumandos iguales

1.2.3.3.1 Propiedades de la multiplicación

Propiedad conmutativa

En una fila hay 5 gimnastas.

Hay 4 filas.

$$5 * 4 = 4 * 5$$

$$a * b = b * a$$

En una multiplicación el orden de los factores no altera el producto. Es la propiedad **conmutativa** de la multiplicación.

Propiedad asociativa

Un edificio tiene 6 pisos; en cada piso hay 2 viviendas y en cada vivienda hay 4 ventanas.
¿Cuántas ventanas tiene el edificio?

Una forma de pensarVentanas en cada piso: $4 * 2$ Ventanas en los 6 pisos: $(4 * 2) * 6$ **Otra forma de pensar**

Ventanas en cada vivienda: 4

Viviendas en los 6 pisos: $2 * 6$ Ventanas en el edificio: $4 * (2 * 6)$

Obsérvese que:

$$(4 * 2) * 6 = 4 * (2 * 6)$$

$$8 * 6 = 4 * 12$$

$$48 = 48$$

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Es la **PROPIEDAD ASOCIATIVA** de la multiplicación**Propiedad distributiva**

En un grupo de amigos, 4 niños y 6 niñas, hacen una colecta para comprar un álbum. Cada uno pone 5 euros. ¿Cuánto dinero recaudan?

Una forma de pensarAmigos que hay en total: $4 + 6$ Total de euros que recaudan: $5 * (4 + 6)$ **Otra forma de pensar**Euros que recaudan las niñas: $5 * 6$ Euros que recaudan los niños: $5 * 4$ Euros que recaudan entre niñas y niños: $5 * 6 + 5 * 4$

Obsérvese que:

$$5 * (4 + 6) = 5 * 4 + 5 * 6 \quad 5 * 10 = 20 + 30 \quad 50 = 50$$

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

Es la **PROPIEDAD DISTRIBUTIVA** de la multiplicación respecto a la suma.

Factor común

$$5 * (3 + 4) = (5 * 3) + (5 * 4)$$

En los dos productos **se repite el 5** como factor.

$$5 \text{ es el } \mathbf{\text{factor común}}, \text{ luego } (5 * 3) + (5 * 4) = 5 * (3 + 4) = 5 * 7 = 35$$

El factor que se repite es el **factor común**.

Multiplicar por 1 y por 0

El producto del número natural **1** por cualquier otro número natural es este último número natural. $122 * 1 = 122$.

El producto de **0** por cualquier número natural es **0**. $244 * 0 = 0$.

Potencias

Carmen ha repartido todos los cromos que tenía entre 5 amigos. Han tocado a 5 cromos cada uno. ¿Cuántos cromos tenía Carmen?

Se puede resolver de varias formas:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$$

$$5 * 5 = 25$$

$$5^2 = 25$$

En el último caso se ha planteado una **potencia**.

Recordar:

$$4^3 = 4 * 4 * 4 = 64 = 4^3 \rightarrow 4 \text{ es la } \textbf{base} \text{ y } 3 \text{ es el } \textbf{exponente}$$

Potencia: Operación de multiplicar factores iguales.

Base es el número que se repite como factor.

Exponente es el número de veces que se repite la base

Lectura de potencias

- Las potencias de exponente 2 se llaman **cuadrados**. 3^2 (se lee: 3 elevado al cuadrado). $3 * 3 = 9$.
- Las potencias de exponente 3 se llaman **cubos**. 3^3 (se lee: 3 elevado al cubo). $3 * 3 * 3 = 27$.
- Las demás potencias se nombran con el número de la base elevado al número que indica el exponente: 2^4 (se lee: 2 elevado a cuatro). $2 * 2 * 2 * 2 = 16$.

Potencias especiales

Si el **exponente** de una potencia es **0** se ha convenido que su **resultado** sea igual a la **unidad**.

$$30^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

$$1.000^0 = 1$$

Si el **exponente** de la potencia es **1**, la **potencia** es **igual** a la **base**.

$$7^1 = 7$$

$$25^1 = 25$$

$$1.000^1 = 1.000$$

Si la **base** es **10** el **resultado** es la **unidad seguida de tantos ceros como indica el exponente**.

$$10^3 = 1.000$$

$$10^7 = 10.000.000$$

Operaciones con potencias

Para **multiplicar potencias** de la **misma base** se escribe la **misma base** y como **exponente** la **suma** de los **exponentes**:

$$3^2 * 3^3 * 3^4 = (3 * 3) * (3 * 3 * 3) * (3 * 3 * 3 * 3)$$

$$3^9 = 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 3^9$$

Para **dividir potencias** de **igual base** se escribe la **misma base** y como **exponente** la **resta** de los **exponentes** de las potencias.

$$2^6 : 2^4 = 2^{6-4} = 2^2$$

$$64 : 32 = 2$$

Para **potencia de una potencia** de **igual base** se escribe la **misma base** y se **multiplican los exponentes**.

$$(3^2)^4 = 3^{2*4} = 3^8$$

EJERCICIOS



1. Pon en forma de multiplicación:

$$12 + 12 + 12 + 12$$

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

$$36 + 36 + 36$$

2. Escribe en forma de suma de sumandos iguales y en forma de multiplicación cada una de las siguientes operaciones:

- Si una hora tiene 60 minutos, ¿cuántos minutos tiene 7 horas?
- Si en un cartón hay 24 huevos, ¿cuántos huevos hay en 12 cartones?
- ¿Cuántos días son 8 semanas?
- Si en una estantería hay 30 libros, ¿cuántos libros hay en 15 estanterías?

3. Demuéstrese la propiedad conmutativa, la asociativa y la distributiva de la multiplicación con tres ejemplos para cada propiedad.

4. Aplica la propiedad asociativa de la multiplicación en:

$$4 * (5 * 17)$$

$$12 * (16 * 7)$$

$$45 * (32 * 15)$$

$$49 * (47 * 50)$$

5. Completa las siguientes igualdades.

$$18 * (5 + \dots) = 18 * 5 + 18 * 7$$

$$6 * (\dots + \dots) = 6 * 2 + 6 * 4$$

$$27 * 3 = (20 + \dots) * 3 = 20 * \dots + 7 * \dots$$

$$321 * 5 = (300 + 20 + \dots) * 5 = 300 * \dots + 20 * \dots + \dots * 5$$

$$425 * 6 = (\dots + 20 + \dots) * 6 =$$

6. Sáquese el factor común y calcúlese.

$$(74 * 12) + (10 * 74)$$

$$(27 * 6) + (27 * 3)$$

$$(32 * 15) + (32 * 9)$$

$$(93 * 19) + (10 * 93)$$

$$(78 * 6) + (78 * 3)$$

$$(198 * 15) + (198 * 9)$$

7. Calcula:

$$\begin{array}{ccc}
 7.603 * 302 & 407 * 345 & 76 * 762 \\
 437 * 100 & 7.040 * 1.000 & 804 * 10.000 \\
 8.964 * 49 & 7.208 * 78 & 683 * 74
 \end{array}$$

8. Expresa en forma de multiplicación y calcúlese su resultado de las siguientes potencias.

$$12^3 \quad 10^5 \quad 8^4 \quad 20^3 \quad 11^2$$

9. ¿Qué significa base de una potencia y exponente de una potencia? Pónganse tres ejemplos y desarróllense.

10. Cómo se leen las siguientes potencias. Hállese el resultado

$$\begin{array}{ccccc}
 15^3 & 4^5 & 10^4 & 7^3 & 18^2 \\
 10^5 & 10^3 & 10^6 & 10^2 & 10^5
 \end{array}$$

11. Complétese las potencias sucesivas de base 2.

Exponente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potencia			2^2								
Valor			4								

12. Calcula:

$$\begin{array}{cccc}
 3^2 * 3^4 * 3^3 & 41^2 : 4^7 & 4^2 * 4 * 4^3 & 5^{10} : 5 \\
 10^9 : 10^4 & 9^4 * 9^2 * 9 & 12^5 : 12^3 & 7^5 * 7 * 7^2 \\
 (7^2)^3 & (3^3)^2 & (12^2)^3 & (4^3)^5
 \end{array}$$

13. Un grifo echa en un estanque 2.345 litros por hora; el grifo está funcionando durante un día entero. ¿Cuántos litros de agua habrá al final del día?

14. En una vitrina hay 5 repisas, en cada repisa hay 9 tazas con 4 ilustraciones cada una. ¿Cuántas ilustraciones hay en total?
15. En una mesa hay 7 cajas, en cada caja hay 12 libros con 340 páginas cada uno. ¿Cuántas páginas hay en total?

1.2.3.4 División exacta

Cinco niños reparten las 40 cartas de la baraja. ¿Cuántas cartas corresponde a cada niño?

El resultado será un número tal que:

$$? * 5 = 40$$

$$5 * ? = 40$$

Es decir, en una multiplicación nos dan el producto y un factor y hay que encontrar el otro factor. Corresponden 8 cartas a cada niño.

Al número 8 se la llama cociente exacto de la división de 40 entre 5.

Se escribe	Elementos que se reparten	Número de partes	Número que corresponde a cada parte
	40	5	8
Se llama	DIVIDENDO	DIVISOR	COCIENTE

División exacta es la operación en que se dan el producto de dos números y un factor y hay que encontrar el otro factor.

1.2.3.4.1 Propiedades de la división exacta

El abuelo reparte 27 cromos entre sus 3 nietos y el padre reparte 18 cromos entre sus hijos.
¿Cuántos cromos recibirá cada niño?

Una forma de pensar

Cromos que recibe del abuelo $\rightarrow 27 : 3$

Cromos que recibe del padre $\rightarrow 18 : 3$

Cromos que recibirá en total: $(27 : 3) + (18 : 3)$

Otra forma de pensar

Cromos que reparten entre el abuelo y el padre $\rightarrow 27 + 18$

Cromos que tocan a cada niño $\rightarrow (27 + 18) : 3$

Observa y comprueba que:

$$(27 + 18) : 3 = 27 : 3 + 18 : 3$$

Esta propiedad se llama **PROPIEDAD DISTRIBUTIVA** de la división exacta respecto de la suma.

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

En una mesa hay sentados 3 niños, tienen una fuente hay 6 croquetas. ¿Cuántas tocarán a cada niño? Si hubiera en la fuente el doble de croquetas, ¿a cuántas tocarían entonces cada niño?

Si hay 6 croquetas en la fuente tocan a $\rightarrow 6 : 3 = 2$

Si hubiera el doble, es decir, $6 * 2$ croquetas, tocan a $\rightarrow (6 * 2) : 3 = 4$ croquetas. $2 * 2 = 4$

Si en una división exacta multiplicamos el dividendo por un número natural el cociente exacto viene multiplicado por dicho número.

Para calcular el cociente de un producto indicado por un número, basta dividir uno de los factores. El resultado se multiplica por el otro factor.

$$(72 * 6) : 8 = (72 : 8) * 6 = 9 * 6 = \boxed{54}$$

1.2.3.5 División entera

También se escribe

$$\begin{array}{r} 26 \overline{) 3} \\ 2 \quad 8 \end{array}$$

también $26/3$

División entera es aquella en que obtenemos **resto distinto de cero**.

$$\text{DIVIDENDO} = \text{DIVISOR} * \text{COCIENTE} + \text{RESTO}$$

EJERCICIOS



1. Completa:

$32 : 4 = \dots$	$63 : 7 = \dots$	$48 : 6 = \dots$	$18 : 3 = \dots$	$56 : 8 = \dots$
$100 : 5 = \dots$	$72 : 9 = \dots$	$81 : 8 = \dots$	$54 : 6 = \dots$	$125 : 5 = \dots$

2. Completa y comprueba las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll} (24 + 9) : 3 = \dots : 3 + \dots : 3 & (45 + \dots) : 5 = 45 : \dots + 15 : \dots \\ (36 + 6) : \dots = \dots 6 + \dots : 6 & (12 + 9 + 6) : 3 = 12 : \dots + \dots : 3 \\ (91 + 49) : \dots = \dots : 7 + \dots : \dots & (101 + 64 + 24) : 8 = \dots \\ (126 + 135 + 153) : 9 & (108 + 72) : 12 \end{array}$$

3. Comprueba y completa las siguientes igualdades:

$$1800 : 3 = (18 * 100) : 3 = (18 : 3) * 100 = \dots$$

$$320 : 4 = \dots \quad 2400 : 6 = \dots \quad 42000 : 7 = \dots \quad 72000 : 8 = \dots$$

4. Completa:

$$\begin{array}{lll} (207 * 4) : 9 = & (119 * 4) : 7 = & (62 * 12) : 4 = \\ (107 * 15) : 5 = & (604 * 18) : 6 = & (114 * 12) : 16 = \end{array}$$

5. Halla el cociente y el resto en las siguientes divisiones. Qué clase de divisiones son y por qué. Realiza la prueba.

$$\begin{array}{llll} 35427 : 73 & 4375 : 58 & 1250003 : 96 & 8569230 : 365 \\ 98760254 : 125 & 85692 : 69 & 951753 : 43 & 965874 : 205 \end{array}$$

6. En una división exacta el dividendo es 1512; ¿puede ser 24 el divisor de dicha división?
7. Halla: $(472 * 7) : 2$ $(1373 * 8) : 3$ $(1229 * 6) : 7$
8. A doce amigos les ha tocado 15000 euros en un sorteo. ¿Qué cantidad le corresponde a cada uno?
9. En una peña de 60 socios deciden comprar una televisión que les cuesta 330 euros y un bingo que cuesta 100 euros. ¿Cuánto dinero tendrá que aportar cada socio?
10. Un fabricante de barras de tiza fabrica en el día 12358 barras y las empaqueta en paquetes de 24 barras. ¿Cuántos paquetes tiene que hacer? ¿sobra algunas barras de tiza?
11. Un camión cisterna tiene 15.632 litros de gasolina. Si cada coche llena su depósito con 22 litros. ¿Cuántos coches pueden llenar el depósito?

1.3

DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

1.3.1 MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO. USO DE LOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

1.3.1.1 Múltiplos de un número

El dueño de un puesto de pipas hace el siguiente cuadro, para conocer las posibles ganancias con la venta de bolsas de pipas.

Número de bolsas que puede vender 2 € = 1 bolsa	0	1	2	3	4 ...
Euros que gana	$2 * 0 = 0$	$2 * 1 = 2$	$2 * 2 = 4$	$2 * 3 = 6$	$2 * 4 = 8$

A los números 0, 2, 4, 6, 8,... se les llama **MÚLTIPLOS** de 2 porque son igual al producto de dos por otro número natural.

Ejemplos.

- 12 es **múltiplo** de 2 porque $12 = 2 * 6$
- 14 es **múltiplo** de 2 porque $14 = 2 * 7$
- 17 **no es múltiplo** de 2 porque 17 no es igual al producto de 2 por ningún número natural.

Un **múltiplo** de un número natural es el producto de éste por otro número natural. Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces.

Observa.

12 es **múltiplo** de 4 y la división $12 : 4 = 3$ es exacta

20 es **múltiplo** de 4 y la división $20 : 4 = 5$ es exacta

28 es **múltiplo** de 4 y la división $28 : 4 = 7$ es exacta

18 **no es múltiplo** de 4 y la división $18 : 4 = \dots$ no es exacta

Un número natural es **múltiplo** de otro cuando la división del primero por el segundo es exacta.

Un número tiene **infinitos múltiplos**. Se obtienen multiplicando sucesivamente el número por 0, 1, 2, 3,..., es decir, por la serie de los números naturales.

1.3.1.1.1 Se forma el conjunto de los múltiplos de un número

Se observan los múltiplos de 5 del siguiente modo:

Dado el conjunto de los números naturales:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

Se forma el siguiente conjunto que se representa por $M(5)$ (leemos **conjunto de los múltiplos de 5**).

$$M(5) = \{5 * 0; 5 * 1; 5 * 2; 5 * 3; 5 * 4; 5 * 5; 5 * 6; 5 * 7; \dots\}$$

Es decir:

$$M(5) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$$

Se observa al multiplicar cada número natural por 5.

1.3.1.1.2 Propiedades del conjunto de los múltiplos de un número

Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad. $0 = 1 * 0$; $1 = 1 * 1$; $2 = 1 * 2$. Todo número se puede expresar como producto de 1 por él mismo.

El cero es múltiplo de cualquier número natural.

$0 = 0 * 3$; $0 = 0 * 4$; $0 = 0 * 5$. Como el producto de cero por cualquier número da cero, resulta que cero es múltiplo de cualquier número.

Dado el conjunto de los múltiplos de 3, $M(3)$

$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \dots\}$

Se forma con sus elementos la siguiente tabla de sumar:

12	15	21	27	30
9	12	18	24	27
6	9	15	21	24
3	6	12	18	21
+	3	9	15	18

6 es múltiplo de 3. 9 es múltiplo de 3. Su suma (**15**) también es múltiplo de 3. Todas las sumas obtenidas son elementos del conjunto $M(3)$.

La suma de dos múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número

Sea el conjunto de los múltiplos de 4, $M(4)$

$$M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$$

Las diferencias obtenidas entre los múltiplos de 4, son también elementos del conjunto $M(4)$.

La **diferencia de los múltiplos** de un número es también **múltiplo** de dicho número

1.3.1.1.3 Números pares e impares

- Se llama número **PAR** a todo múltiplo de 2. Se representa por la expresión $2n$; siendo n un número natural cualquiera.
- Números **IMPARES** son los no múltiplos de 2. Su representación general es $2n + 1$.

1.3.1.2 Divisores de un número

Observa:

La división $21 : 7 = 3$ es exacta, entonces se dice que 7 es divisor de 21 o también que 7 divide a 21

Estas afirmaciones se expresan con el símbolo $/$; $7/21$ (que se lee: 7 divide o es divisor de 21).

Un número es **divisor** de otro o **divide** a otro cuando es exacta la división de éste por el primero. Un número es divisor de otro cuando está contenido en él un número exacto de veces.

1.3.1.2.1 Propiedades del conjunto de los divisores de un número

3 **divide** a 27, es decir, $27 : 3 = 9$; luego 27 es **múltiplo de 3** $\rightarrow 27 = 3 * 9$

Si un número divide a otro éste es múltiplo de aquél

$$3 \text{ divide a } 27; 3/27 \quad 3/(27 + 9)$$

$$3 \text{ divide a } 9; 3/9 \quad 3/(27 - 9)$$

$$8 \text{ divide a } 88; 8/88 \quad 8/(88 + 32)$$

$$8 \text{ divide a } 32; 8/32 \quad 8/(88 - 32)$$

Se comprueba que:

Si un número divide a otros dos, también divide a su suma y a su diferencia.

$$\text{Si } 4/8 \text{ y } 8/16 \text{ entonces } 4/16$$

$$\text{Si } 5/15 \text{ y } 15/30 \text{ entonces } 5/30$$

Si un número divide a otro y éste divide a un tercero entonces el primero divide al tercero.

1.3.2 USO DE LOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Los CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD son unas reglas que permiten averiguar, en algunos casos, si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Algunas de estas reglas son.

- Un número es divisible por **10** si acaba en cero.
- Un número es divisible por **2** si acaba en cero o en cifra par.
- Un número es divisible por **5** si acaba en cero o en cinco.
- Un número es divisible por **40** por **25** si las dos últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 4 o 25, respectivamente.

Justificación de la divisibilidad por 4 y por 25: Como $100 = 4 * 25$, todo número que termine en dos ceros es múltiplo de 100 y por tanto, múltiplo de 4 y de 25.

$8.236 = 8.200 + 36$. Como 8.200 es múltiplo de 4, bastará que lo sea 36, las dos últimas cifras, para que el número total sea múltiplo de 4.

Una justificación similar se puede hacer para el 25.

- Un número es divisible por **80** por **125** si las tres últimas cifras son ceros o forman un número múltiplo de 8 o 125, respectivamente.

Justificación de la divisibilidad por 8 y por 125: Como $1.000 = 8 * 125$, todo número que acaba en tres ceros es múltiplo de 8 y múltiplo de 125. El número 36.120 se puede descomponer así:

$36.120 = 36.000 + 120$. Como el primer sumando termina en tres ceros, es múltiplo de 8 y de 125, y como $120 = 8 * 15$, también es múltiplo de 8, luego 36.120 es múltiplo de 8.

De igual forma se puede justificar la regla de divisibilidad para 125.

- Un número es divisible por **90** por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9 o de 3, respectivamente.

Justificación de la divisibilidad por 3:

Sea el número 684 $\rightarrow 6 + 8 + 4 = 18$. 18 es múltiplo de 3.

Si se multiplica un múltiplo de 3 por un número, el producto será también múltiplo de 3 $\rightarrow 9 \cdot 4 = 36$

La suma de dos múltiplos de 3 también es múltiplo de 3 $\rightarrow 9 + 12 = 21$. Se observará que la suma de las cifras que forman el número debe ser múltiplo de 3, para que el número sea múltiplo de 3.

Del mismo modo se puede justificar el criterio de divisibilidad por el 9.

- Un número es divisible por **6** si lo es a la vez por 2 y 3.

24 $\rightarrow$ Como es múltiplo a la vez de 2 y 3, por tanto, 24 es múltiplo de 6.

40 $\rightarrow$ Es múltiplo de 2, no es múltiplo de 3, por tanto, no es 40 múltiplo de 6.

- Un número es divisible por **11** cuando la diferencia de la suma de las cifras del lugar par y la suma de las cifras del lugar impar es múltiplo de 11.

La resta se hace en el sentido que sea posible. Así, el número 121 es divisible por 11 porque $1 + 1 - 2 = 0$. El 0 es múltiplo de todos los números y, por tanto, de 11.

EJERCICIOS



1. Encuentra tres números que sean múltiplos a la vez de 4 y 6.
2. Escribe cinco múltiplos de 12, cinco múltiplos de 18 y cinco múltiplos de 27.
3. Escribe el conjunto de los M (15) de los múltiplos de 15. Escribe el conjunto de los M (17) de los múltiplos de 17.
4. Un libro vale 9 €. ¿Cuánto costarán 7 libros como éste? ¿el resultado es un múltiplo de qué números?
5. Escribe cinco elementos de los M (9). Comprueba que la suma de cualquiera de los elementos que has escrito es múltiplo de 9.
6. Escribe tres ejemplos de cada una de las propiedades de los múltiplos de un número.

7. Escribe con los números 2, 3, 4, 6, 8, 9, 18, 32, 36 todas las relaciones posibles entre ellos con el símbolo /.
8. Escribe divisores de. 84, 124, 325, 705.
9. Escribe tres ejemplos de cada una de las propiedades de los divisores de un número.
10. Qué criterios de divisibilidad se cumplen en los siguientes números:

125, 633, 10010, 1397, 90303, 2430, 744, 957

1.3.3 NÚMEROS PRIMOS. NÚMEROS COMPUESTOS. DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS EN FACTORES PRIMOS

Número **PRIMO** es aquel que sólo es divisible por él mismo y por 1. 13 es primo. Sus divisores son 1 y 13.

Número **COMPUESTO** es aquel que tiene otros divisores distintos de él mismo y de 1. 12 es compuesto. Sus divisores son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

1.3.3.1 Cómo averiguar si un número es primo o compuesto

Los números primos son infinitos. Los números primos menores de 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 67, 73, 79, 83, 89, 97.

Para **averiguar** si un número es **primo o compuesto**, se divide por la serie de los números primos, 2, 3, 5, 7, 11, 13..., hasta **llegar a una división cuyo cociente sea igual o menor que el divisor**. Si todas las divisiones son inexactas (*enteras*), el número propuesto es **primo**.

Ejemplo: ¿Es primo el número 127?

127 no es divisible por 2. Tampoco es por 3 y por 5. Si se divide entre 7 sale una división cuyo cociente es 18 y cuyo resto es 1, por tanto, no es divisible por 7. Si se divide entre 11 sale una división cuyo cociente es 11 y cuyo resto es 6, por tanto, no es divisible por 11. El cociente 11 es igual al divisor, por lo que no es necesario seguir dividiendo. El número 127 es primo.

1.3.4 DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS EN FACTORES PRIMOS

Todo **NÚMERO COMPUESTO** se puede expresar como un **producto de factores primos**.

Ejemplo: Se va a realizar la **descomposición del número 120** es factores primos.

Primero se debe comprobar si 120 es divisible por los primeros números primos (2, 3, 5, 7...) empezando siempre por el menor. En este caso es divisible por 2.

$$120 : 2 = 60$$

Con los cocientes que se van obteniendo se vuelve a ensayar.

$60 : 2 = 30$; $30 : 2 = 15$; $15 : 3 = 5$; $5 : 5 = 1$. Estos cálculos se disponen así:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$120 = 2 * 2 * 2 * 3 * 5 = 2^3 * 3 * 5$$

1.3.4.1 Cómo se hallan todos los divisores de un número

Para hallar todos los **divisores** de un número, por ejemplo **60**, se procede así:

1. Se descompone el número en producto de factores primos. $60 = 2^2 * 3 * 5$
2. Se escriben las sucesivas potencias de los factores primos que se han encontrado, empezando por el 1.

A. 1, 2, 2^2

B. 1, 3

C. 1, 5

3. Se multiplican los números de la segunda fila B por los de la fila A.

E. 1, 2, 4, 3, 6, 12

4. Se multiplican los números de la tercera fila C por los que figuran en E. de este modo se obtienen todos los **divisores de 60**.

1, 2, 4

3, 6, 12

5, 10, 20

15, 30, 60

Se observa que todos los divisores de **60** empiezan por el **1**, que es divisor de todos los números y termina por **60**, que es el número dado.

1.3.4.2 Divisibilidad por descomposición en factores

¿Es divisible 1.680 por 120?

Para responder sin hacer la división, se puede **descomponer los números en producto de factores primos**.

$$1.680 = 2^4 * 3 * 5 * 7$$

$$120 = 2^3 * 5 * 3$$

Se observa que.

1. El número 1.680 tiene todos los factores de 120 (2, 3, 5) y un factor más (7).

2. Los factores comunes 2, 3, 5 figuran en 1.680 con mayores o iguales exponentes que en 120. Por ello se puede escribir:

$$1.680 = 2^4 * 3 * 5 * 7 = 2 (2^3 * 3 * 5) * 7 = 120 * 14$$

Un número natural **a** es divisible por otro **b** si todos los factores primos que aparecen en la descomposición en factores primos de **b** figuran en la descomposición factorial de **a** con iguales o mayores exponentes.

1.3.5 CÁLCULO DE MÚLTIPLOS Y DIVISORES COMUNES A VARIOS NÚMEROS

Se consideran los números **3** y **5**.

Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, **15**, 18, 21, 24, 27, **30**,...

Los múltiplos de 5 son: 5, 10, **15**, 20, 25, **30**, 35, 40,...

Los múltiplos comunes serán: 15, 30,...

Se consideran los números **12** y **30**.

Los divisores de 12 son: **1**, **2**, **3**, 4, **6**, 12.

Los divisores de 30 son: **1**, **2**, **3**, 5, **6**, 15, 30.

Los divisores comunes de 12 y 30 serán: 1, 2, 3, 6.

Dos números se dice que son primos entre sí cuando su único divisor común es el 1

Los números 20 y 21 sólo tienen un divisor común: 1. Por esta razón 20 y 21 son primos entre sí. **El máximo común divisor de dos números primos entre sí es 1.**

1.3.6 MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M. C. D.) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M. C. M.): PROCEDIMIENTOS DE CÁLCULO

Los divisores comunes de 12 y 30 serán: 1, 2, 3, 6.

El mayor de estos divisores comunes es 6.

6 es el máximo común divisor de 12 y 30. Se escribe: m. c. d. (12, 30) = 6

El **máximo común divisor** de dos números o más números es el **máximo divisor común** de dichos números.

Si un número es múltiplo de otro, el menor es el máximo común divisor de ambos.

$$\text{m. c. d. (12, 6)} = 6$$

1.3.7 CÓMO SE HALLA EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS (MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN EN PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS)

Hallar el MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d) de 36, 60 y 48

1. Se descomponen los números en productos de factores primos

$$36 = 2^2 * 3^2$$

$$60 = 2^2 * 3 * 5$$

$$48 = 2^4 * 3$$

2. Se escriben todos los factores comunes que aparecen en las descomposiciones. En este caso el 2 y el 3. El producto de estos factores, elevando cada factor al menor de los exponentes ($2^2, 3^1$) da el máximo común divisor

$$\text{m.c.d. } (36, 60, 48) = 2^2 * 3^1 = 12$$

Para hacer el m.c.d se cogen los **factores comunes** a todos los números dados elevados **al menor exponente**.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el **menor** de los **múltiplos comunes**, distinto de cero, de dichos números.

Ejemplo:

Primeros múltiplos de 6, 12 y 8.

Múltiplos de 6 = 6, 12, 18, **24**, 36,...

Múltiplos de 12 = 12, **24**, 36, 48,...

Múltiplos de 8 = 8, 16, **24**, 32,...

Se aprecia que el menor de los múltiplos comunes es 24.

$$\text{m.c.m. } (6, 12, 8) = 24$$

En general, cuando los números no son tan fáciles como los anteriores, se utiliza el método de la DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL.

Ejemplo:

Hallar el m.c.m (490, 300, 480)

Se descomponen los números en producto de factores primos

$$490 = 2 * 5 * 7^2$$

$$300 = 2^2 * 5^2 * 3$$

$$480 = 2^5 * 5 * 3$$

1. Se escriben todos los factores comunes y no comunes que aparecen en las descomposiciones. En este caso los factores son 2, 3, 5 y 7.
2. Se forma el producto de estos factores elevando cada uno de ellos al mayor de sus exponentes, obteniendo así el m.c.m.

$$\text{m.c.m. (490, 300, 480)} = 2^5 * 5^2 * 7^2 * 3 = 117.600$$

Para hacer el m.c.m se cogen los factores comunes y no comunes de todos los números al mayor exponente.

1.3.8 APLICACIONES DE LA DIVISIBILIDAD Y EL USO DEL M. C. D. Y DEL M. C. M. EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ASOCIADOS A SITUACIONES COTIDIANAS

Aprovechar las Reglas de Divisibilidad, el m.c.d. y el m.c.m. en la vida cotidiana facilita la resolución de algunos problemas cotidianos.

Obsérvese:

1.3.8.1 Divisibilidad

En un almacén hay 7.344 botellas. ¿Se podrían colocar en cajas de 4 botellas sin que sobre ninguna botella? y ¿en cajas de 6 botellas?

Solución.

7.344. Este número se puede escribir así $\rightarrow 7.344 = 7.300 + 44$. Como **7.300 es múltiplo de 4** (las dos últimas cifras son ceros), bastará que lo sea 44, las dos últimas cifras, para que el número total sea múltiplo de 4 $\rightarrow$ **44 es múltiplo de 4**, por tanto **7.344 es múltiplo de cuatro**.

Se podrán colocar las 7.344 botellas en cajas con 4 botellas sin que sobre ninguna.

7.344 es múltiplo de 6, puesto que lo es a la vez de 2 y 3.

Se podrán colocar las 7.344 botellas en cajas con 6 botellas sin que sobre ninguna.

1.3.8.2 Máximo común divisor

Se quiere embaldosar una sala de 1.620 cm de largo por 980 cm de ancho con baldosas cuadradas lo más grandes posibles y enteras. ¿Cuál será la longitud del lado de cada baldosa?

Solución.

La longitud en cm. del lado de cada baldosa deberá ser un divisor común de 1.620 y 980.

Como se quiere que las baldosas tengan la mayor superficie posible, ese divisor común deberá ser el máximo, es decir, el m.c.d.

$$\text{m.c.d. (1.620, 980)} = 20$$

El lado de cada baldosa es 20 cm.

1.3.8.3 Mínimo común múltiplo

Una sirena toca cada 450 segundos, otra cada 250 segundos y una tercera cada 600 segundos. Si a las 4 de la mañana han coincidido tocando las tres, ¿a qué hora volverán a tocar otra vez juntas?

Solución.

El tiempo en segundos que tardarán en volver a tocar juntas las tres sirenas será un múltiplo común de los números 450, 250 y 600.

La primera vez que toquen juntas coincidirá con el menor de los múltiplos comunes, es decir, con el m.c.m.

$$\text{m.c.m (450, 250 600)} = 9.000$$

Las tres sirenas **coincidirán al cabo de 9.000 segundos** = 2 horas, 30 minutos. Por tanto, tocarán a las **seis y media de la mañana**.

EJERCICIOS

1. Averigua si los siguientes números son primos o compuestos:

101	123	143	157	511	1.001	1.207
191	121	143	229	557	671	1.314

2. Hacer la descomposición factorial de:

240	180	375	2.250	1.400	936
2.280	3.254	1.050	389	4.002	634

3. Al descomponer el número 3.000 en factores primos, se puede escribir directamente:

$$3.000 = 3 * 1.000 = 3 * 2^2 * 5^3$$

Hacer de esta forma la descomposición en producto de factores primos de.

5.000	8.000	3.600
4.600	20.000	26.000

4. Escribe todas las descomposiciones de 60 en producto de dos factores que sean números pares.
5. Escribe 6 múltiplos de $2^2 * 3$.
6. Halla todos los divisores de:

80	150	90	200
84	100	120	180

7. Un número **n**, descompuesto en factores primos es $n = 2^2 * 3^2 * 5$. Escribe todos los divisores de n.
8. Escribe seis números primos entre sí
9. Calcula el m.c.d. de:

110 y 120	124 y 120	212 y 218	136 y 139	150 y 175
225 y 280	248 y 196	4.000 y 90	3.250 y 100	360 y 140

10. Halla los diez primeros múltiplos de 5 y 15. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo?
11. Calcula el m.c.m. de los pares del ejercicio 9.
12. Calcula el m.c.d. y el m.c.m de los siguientes números.

100, 148 y 156	130, 190 y 424	700, 600 y 500	270, 150 y 180
133, 72 y 81	1.100, 110 y 25	800, 600 y 200	1.200, 39 y 204

13. La recaudación de la máquina automática que despacha billetes de autobús de precio único es de 3.015 € un mes y de 2.948 € al mes siguiente. ¿Cuánto cuesta el billete de autobús? ¿Cuántos se despacharon cada mes?

14. Un barco A sale de un puerto cada 48 días y un barco B sale del mismo puerto cada 40 días. El 12 de marzo coincidieron ambos barcos en el puerto. ¿Qué día volverán a coincidir?
15. En una competición de atletismo, un locutor de radio dice:
17. El número de peldaños de las escaleras de una torre es de 148. ¿De cuántas formas es posible bajarlos o subirlos a saltos, saltando siempre el mismo número de peldaños? ¿Y se las escaleras tuvieran 101 peldaños?
18. Un viajero va a Valencia cada 18 días y otro cada 24 días. Hoy han estado los dos en Valencia. ¿Dentro de cuántos días volverán a estar los dos a la vez en Valencia?
19. La longitud del neumático delantero de una bicicleta mide 60 cm y el trasero 175 cm. Se señalan con tiza los puntos de los dos neumáticos que tocan el suelo y se hace andar la bicicleta. ¿Cuánto debe avanzar como mínimo la bicicleta para que coincidan las dos señales a la vez en el suelo?
20. Dos cuerdas miden 108 cm y 30 cm respectivamente. Se desea partir ambas cuerdas en trozos iguales de la mayor longitud posible. ¿Cuál ha de ser la longitud de cada trozo? ¿Cuántos trozos de cuerda van a salir?

1.4 NÚMEROS ENTEROS

1.4.1 NÚMEROS ENTEROS: POSITIVOS Y NEGATIVOS.

1.4.1.1 Cantidades positivas y cantidades negativas

Si en un día de invierno oímos decir que la **temperatura** de Ávila es de tres grados, nos quedará la duda si se trata de tres grados bajo cero o de tres grados sobre cero.

A. Para expresar tres **grados** sobre cero se escribe **+3°**.

Para expresar tres grados bajo cero se escribe **-3°**.

Además de la temperatura, hay otras magnitudes que varían en dos sentidos.

B. Las fechas referidas a la Era cristiana:

El año **-320** significa el año 320 antes de Cristo.

El año **+100** significa el año 100 después de Cristo.

C. Las cantidades de dinero que posee o que gana una persona se consideran positivas, y las cantidades que debe, gasta o paga se consideran negativas.

María ha ganado 2.000 € → Se escribe: **+2.000**

Teresa ha gastado 1.000€ → Se escribe: **-1.000**

La recta **r** se puede recorrer en dos sentidos. Los desplazamientos hacia la **derecha** se consideran **positivos** y los desplazamientos hacia la **izquierda**, **negativos**.

Hay **magnitudes** que **varían** en **dos sentidos**: **positivo** y **negativo**.

Para expresar las **cantidades positivas** se utilizan los **números naturales** con el **signo más (+)**.

Para expresar las **cantidades negativas** se emplean los **números naturales** con el **signo menos (-)**.

1.4.1.2 Concepto de número entero

A. Si la **temperatura ha aumentado** seis grados, la variación de la temperatura es de **+6°**.

Si la **temperatura ha descendido** seis grados, la variación de la temperatura es **-6°**.

B. Tomás **ha ingresado** en su **cuenta corriente** 2.500 €. La variación de sus ahorros es **+2.500 €**.

Ana **ha gastado** 1.500 €. La variación de sus ahorros es **-1.500 €**.

C. El **coche A** ha recorrido 60 Km. en **sentido positivo**. El desplazamiento del coche A ha sido **+60 Km.**

El **coche B** ha recorrido 60 Km. en **sentido negativo**. El desplazamiento del coche B ha sido **-60Km.**

Un **NÚMERO ENTERO** es un **número natural precedido del signo + o del signo -**.

Los números enteros con el signo **+** se llaman números **ENTEROS POSITIVOS**.

Los números enteros con el signo **-** se llaman números **ENTEROS NEGATIVOS**.

El número entero **0** también se puede escribir con signo, pero se suele escribir sin él. Por eso, **+0**, **-0** y **0** son tres símbolos que representan el número **0**.

El **conjunto de los números enteros** (*positivos, negativos y el 0*) se designa por la letra **Z**.

$$Z = \{-\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +\dots\}$$

El conjunto de los **números enteros positivos** se designa con **Z^+** y el conjunto de los **números enteros negativos** por **Z^-** .

La unión de los conjuntos **Z^+** y **Z^-** y el número **0** da el conjunto **Z**.

$$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$$

EJERCICIOS



1. Expresa con números enteros.

Un señor nació en el año 287 a. C.

Se han ganado 2.000 € en la lotería.

El año actual.

Se han gastado 200 € en las rebajas.

El año del descubrimiento de América.

Se hace un pozo de 12 m.

Doce grados sobre cero.

Un edificio tiene una altura de 500m.

Siete grados bajo cero

Una piscina tiene una profundidad de 5m.

Tengo en mi cuenta 3.400 €

Se han gastado 6.000 €

La temperatura ha disminuido 6 grados

Han pagado 500 €.

Año 1.000 a. C.

Una bodega tiene una profundidad de 50m.

2. Escribe diez números enteros y subraya los números naturales.

3. Escribe los números enteros comprendidos entre:

-4 y +5

-7 y +7

-3 y +2

-8 y +6

Representa los anteriores números en una recta numérica.

4. Lee y contesta:

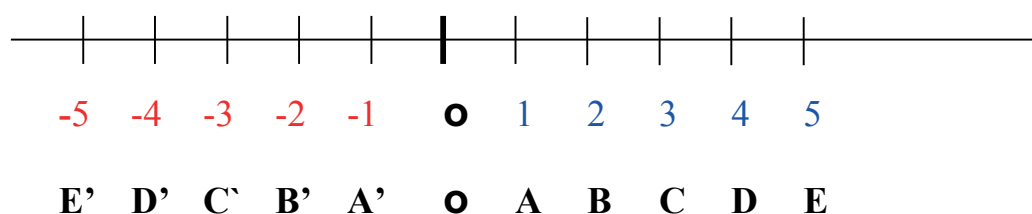
¿Qué número negativo está a igual distancia del 0 que el +4? ¿Y de +8? Representa en una recta numérica.

¿Hay entre esos números puntos que sean simétricos respecto al punto 0?

1.4.2 REPRESENTACIÓN Y COMPARACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Fijada una **unidad de medida**  **u**, se llevan sobre una recta segmentos iguales a esta unidad a la derecha y a la izquierda de un punto **0** que se llama **origen**.

En la semirrecta de la **derecha** se representan los números **positivos**, y en la semirrecta de la **izquierda**, los números **negativos**.



Semirrecta negativa $\rightarrow \mathbf{Z^-}$ $\mathbf{Z}$ Semirrecta positiva $\mathbf{Z^+}$

Así se obtienen los puntos A, B, C, D, E que corresponden a los enteros positivos +1, +2, +3, +4, +5,... y los puntos A', B', C', D', E' que corresponden a los enteros negativos -1, -2, -3, -4, -5, ...

Al punto **O** (*origen de las dos semirrectas*) le corresponde el número **0**.

El número +1 se dice que es la abscisa del punto **A**.

El número +2 se dice que es la abscisa del punto **B**.

Del mismo modo, -1, -2, ...y demás números enteros representados son las abscisas de los puntos **A, B', ...** respectivamente.

1.4.2.1 Valor absoluto de número entero

$$\mathbf{Z = \{-..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +...\}}$$

Número entero	valor absoluto	Número natural
-3	/-3/	3
+2	/+2/	2

Los signos $+$ y $-$ que llevan los números enteros no son signos de operaciones (*suma, resta*), sino que indican simplemente la cualidad de ser positivos o negativos.

Cuando se prescinde del signo en un número entero, por ejemplo (-5) , resulta el número natural 5. Este número natural 5 se llama **valor absoluto** del número entero -5 .

Se llama **VALOR ABSOLUTO** de un número entero al **número natural** que resulta de **prescindir del signo**.

1.4.2.2 Comparación de números enteros

1. Una persona que tiene 50 € tiene más dinero que otra que tiene 30 €.

$$+50 > +30$$

2. Una persona que tiene 10 € tiene más dinero que otra que debe 60 €.

$$+10 > -60$$

3. Una persona que no tiene ningún € tiene más que otra que debe 30 €.

$$0 > -30$$

4. Una persona que debe 30 € tiene más que otra que debe 50 €.

$$-30 > -50$$

Obsérvese que en cada uno de los cuatro casos se puede encontrar un número positivo que sumado al segundo dé el primero.

1. Si a $(+30)$ se le suma $(+20)$, la suma será $(+50)$.
2. Si a (-60) se le suma $(+70)$, la suma será $(+10)$.
3. Si a (-30) se le suma $(+30)$, la suma será 0.
4. Si a (-50) se le suma $(+20)$, la suma será (-30) .

Un número entero a es mayor que otro b, y se escribe $a > b$, si se puede hallar otro número entero positivo c tal que $b + c = a$.

De dos números enteros cualesquiera, es mayor el que en la recta numérica está **más a la derecha**.

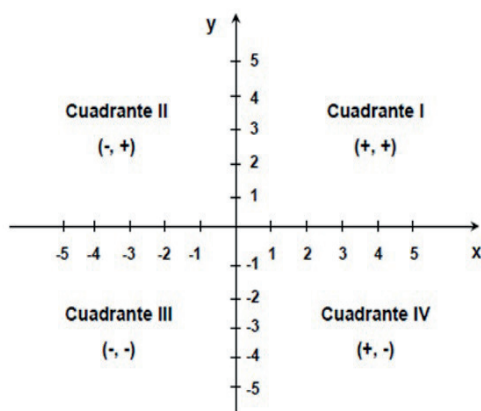
De dos números **positivos**, es **mayor** el que tiene **mayor valor absoluto**.

De dos números **negativos**, es **mayor** el que tiene **menor valor absoluto**.

Todo número positivo es mayor que cualquier número negativo.

El **cero** es **mayor que cualquier número negativo**.

1.4.2.3 Ejes de coordenadas.



Observa las dos rectas perpendiculares **X** e **Y** que se cortan en el punto **O**.

Con un segmento unidad, a partir del punto **O**, se han representado en ambas rectas los números enteros.

En la recta **X** los números positivos se han representado, a partir del punto **O**, en la semirrecta de la derecha.

En la recta **Y** los números positivos se han representado, a partir del punto **O**, en la semirrecta superior.

O → origen de coordenadas

x → eje de abscisa

y → eje de ordenadas

Dos **números enteros** en el eje de las **abscisas** es **MAYOR** el que se representa **más a la derecha**.

Dos **números enteros** en el eje de las **ordenadas** es **MAYOR** el que se representa **más arriba**.

Así: (-2) que está más a la derecha en el eje de las abscisas es mayor que (-5)

(-3) que está más arriba en el eje de las ordenadas es mayor que (-6).

Igualmente sucede con todos los números enteros.

1.4.2.4 Coordenadas de un punto

A cada par de números enteros corresponde un **punto** del cuadriculado, y a cada punto del cuadriculado le corresponde un **par** de números enteros.

Así, el par **(-2, -3)** corresponde al punto A.

-2 es la abscisa del punto A.

-3 es la ordenada del punto A.

Los números -2 y -3 del par **(-2, -3)** se llaman **COORDENADAS CARTESIANAS** del punto A