

1

UTILIZACIÓN DE LOS NÚMEROS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1.1 NÚMEROS NATURALES

Nuestro día a día empieza con números: la alarma a las 7 para despertarnos, conducir 20 km para ir a trabajar, etc

Los números naturales surgieron de la necesidad de contar. Desde las primeras civilizaciones ya se representan los números, no como los conocemos en la actualidad sino con diversidad de símbolos.

El conjunto de los números naturales se representa como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

1.1.1 Descomposición de un número natural en factores primos

Cualquier número natural se puede descomponer en números primos. ¿Qué es un número primo? Es un número que sólo se puede dividir entre 1 y él mismo, como el 7, 13, 19...

En la siguiente tabla encontrarás los números primos que hay entre los 100 primeros. Fig 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fig. 2 Taba de números primos entre los 100 primeros

Para descomponer un número en factores primos, debemos conocer primero los criterios de divisibilidad, que nos ahorran mucho tiempo en dicha tarea ya que no tendremos que ir probando con cada número a ver si es posible dividirlo.

En la siguiente tabla (fig. 3) se resumen los principales criterios de divisibilidad que utilizaremos en la descomposición de un número en factores primos.

DIVISIBLE POR	CRITERIO DE DIVISIBILIDAD	EJEMPLO
2	Si el número acaba en cifra par (0, 2, 4, 6, 8).	210, 344, 1826
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.	345: 3+4+5= 12. 345 Sí es múltiplo de 3
5	Si el número acaba en 0 o en 5.	20, 55, 340
7	Se separa la cifra de las unidades y se multiplica por dos. Al número que quedó al quitarle la cifra de las unidades se le resta lo anterior. Si el resultado es múltiplo de 7, el número es divisible entre 7.	$91 \overline{) 1} \times 2 = 2$ $9 - 2 = 7$ que es múltiplo de 7. Entonces 91 es divisible por 7 $91 : 7 = 13$
11	Se suman las cifras de las posiciones pares, se suman las cifras de las posiciones impares y se restan ambas cifras. Si el resultado es 0 ó 11, el número es divisible entre 11.	$1353: 1+5=6; 3+3=6$ $6-6= 0$ 1353 es divisible entre 11 $1353:11=123$

Fig. 3 Principales criterios de divisibilidad

Descomposición de un número en factores primos

Ejemplo resuelto 1: Realiza la descomposición factorial del número 340

340
170
85
17
1

2
2
5
17

340
140
00

2
2
5
17

Como el 17 es número primo ya no se puede factorizar más

La descomposición en factores primos del número 340 se escribe:

340 = 2 · 2 · 5 · 17

Fig. 4. Descomposición de un número en factores primos

PRACTICA

1. De los siguientes números, indica cuáles son primos.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 25, 27, 29, 33, 37, 41, 63, 67, 79, 83, 87, 91
2. Marca con una X las casillas que correspondan:

NÚMERO	DIVISIBLE POR:				
	2	3	5	7	11
360					
462					
665					
1815					

3. Realiza la descomposición factorial de los siguientes números:
128, 468, 1032.

Solución: $128 = 2^7$; $468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$; $1032 = 2^3 \cdot 3 \cdot 43$

1.1.2 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Máximo común divisor es el mayor número que divide a dos o más números a la vez.

m.c.d es la abreviatura utilizada para denominar el máximo común divisor.

Este m.c.d tiene diferentes utilidades: simplificación de fracciones, problemas de repartos, etc

El máximo común divisor se calcula siguiendo estos pasos:

1. Realizando la descomposición factorial de cada uno de los números.
2. Buscando los factores comunes a todos.
3. Multiplicando estos factores en caso de que sean varios.

En el ejemplo resuelto siguiente (fig. 5) se pueden ver los pasos mencionados anteriormente.

Ejemplo resuelto 2: calcula el máximo común divisor de 40, 65 y 120.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$65 = 5 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D):

Una vez realizada la descomposición factorial elegimos los factores comunes a los tres elevados al menor exponente.

$$40 = 2^3 \cdot \textcircled{5}$$

$$65 = \textcircled{5} \cdot 13$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot \textcircled{5}$$

$$\underline{\text{m.c.d}(40, 65, 120) = 5}$$

Fig. 5 Cálculo de máximo común divisor

Mínimo común múltiplo de dos o más números: es el menor número que contiene un número exacto de veces a cada uno de esos números.

m.c.m es la abreviatura utilizada para denominar el mínimo común múltiplo.

Este m.c.m tiene diferentes utilidades: suma y resta de fracciones, problemas de repetición en el tiempo, ecuaciones con fracciones, etc

El mínimo común múltiplo se calcula siguiendo estos pasos:

1. Se hace la descomposición factorial de cada uno de los números.
2. Se buscan los factores comunes y no comunes a todos elevados al mayor exponente.

3. Se multiplican dichos factores y el resultado es el m.c.m.

En el ejemplo resuelto siguiente (fig. 6) se pueden ver los pasos a seguir para el cálculo del m.c.m.

Ejemplo resuelto 2: Calcula el mínimo común múltiplo de 40, 65 y 120.

40	2	65	5	120	2
20	2	13	13	60	2
10	2	1		30	2
5	5			15	3
1				5	5
				1	

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

$$65 = 5 \cdot 13$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m):

Una vez realizada la descomposición factorial elegimos todos los factores, comunes y no comunes, elevados al mayor exponente, sin repetirlos.

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

$$65 = 5 \cdot 13$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{m.c.m (40, 65, 120)} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 1.560$$

Fig. 6 Cálculo de mínimo común múltiplo

PRACTICA

4. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números:

a) 32, 84 y 160

b) 73, 146 y 584

Solución: a) m.c.d = 4; m.c.m = 3.360; b) m.c.d = 73; m.c.m = 584;

Ejemplo resuelto: Paco es albañil y tiene que alicatar la pared de la cocina de un restaurante de 6,4 m de largo por 3,6 m de alto con azulejos cuadrados. ¿De qué tamaño deben ser estos azulejos para que no haya que cortar ninguno de ellos a la hora de revestir la pared?

Este es un problema de cálculo de m.c.d.

Pasos a seguir:

-1º Habría que pasar a una unidad más lógica porque la medida de los azulejos, normalmente, se dan en cm. Así que pasaremos los m a cm y así también evitamos trabajar con decimales a la hora de descomponerlos.

$$6,4 \text{ m} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 640 \text{ cm}; \quad 3,6 \text{ m} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 360 \text{ cm};$$

- 2º Descomponemos factorialmente las dos medidas.

640	2	360	2
320	2	180	2
160	2	90	2
80	2	45	3
40	2	15	3
20	2	5	5
10	2	1	
5	5		
1			

$$640 = 2^7 \cdot 5 \quad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

- 3º Calculamos el máximo común divisor.

$$\text{m.c.d (360, 640)} = 2^3 \cdot 5 = 40$$

Solución: Paco debe alicatar la pared con azulejos de 40x40 cm

PRACTICA

5. En nuestra granja tenemos 90 gallinas y 40 patos. Queremos repartirlos en corrales, con la cantidad mínima de animales, sin mezclarlos, ¿Cuántos animales debemos poner en cada jaula?

Solución: 10

6. María va al gimnasio cada 3 días y José va cada 5 días. Si coincidieron el día 4, ¿Cuándo volverán a encontrarse en el gimnasio los dos?

Solución: el día 19

1.2 NÚMEROS ENTEROS

Como con los números naturales no se cubrían todas las situaciones de la vida cotidiana, o como cuando en una resta el minuendo es más pequeño que el sustraendo, surgió la necesidad de ampliar este conjunto de números positivos o naturales a uno mayor que incluyese el conjunto de números negativos.

De ahí nacieron los números enteros, que abarcan desde el 0, los números enteros positivos o naturales a los enteros negativos.

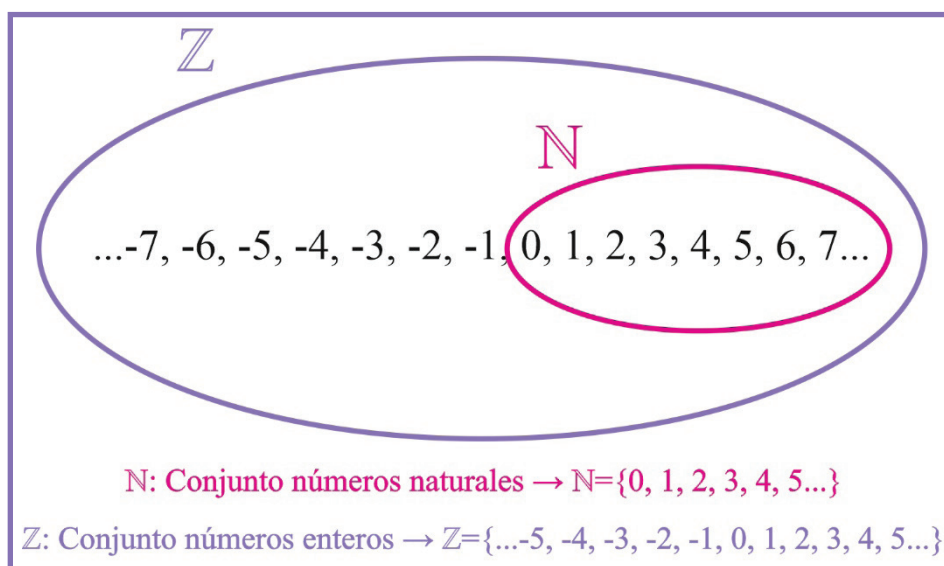


Fig. 8 Conjunto de números enteros

1.2.1 Representación de los números enteros

Los números enteros se representan en la recta real, normalmente en horizontal (fig. 9) pero también en vertical en algunas ocasiones.

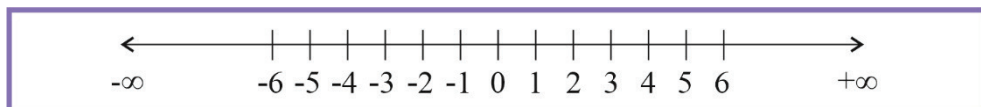


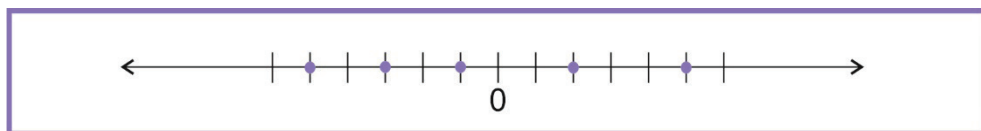
Fig. 9 Representación números enteros en la red

Hacia la izquierda del 0 se reparten los números enteros negativos: -1, -2, -3 ...y hacia la derecha del 0 los números enteros positivos o naturales.

Cuando hablamos de rectas decimos que son infinitas, como los números enteros: hacia la izquierda pondríamos $-\infty$ y hacia la derecha $+\infty$.

PRACTICA

7. Representa estos números en la recta real:
1, -5, -1, 3, 6, 0
8. Indica qué números están representados en la recta rectal de la imagen.



Utilizamos los números enteros en infinidad de situaciones de la vida cotidiana:

Mi plaza de parking se encuentra en el tercer sótano: -3 .

Para hacer el bizcocho hay que precalentar el horno a $+185^\circ$

La temperatura a las 3 de la mañana era de siete grados bajo cero: -7° .

Le debo a mi hermano Luis 200 €: -200 €

Maribel ha subido los 325 escalones del campanario: $+325$

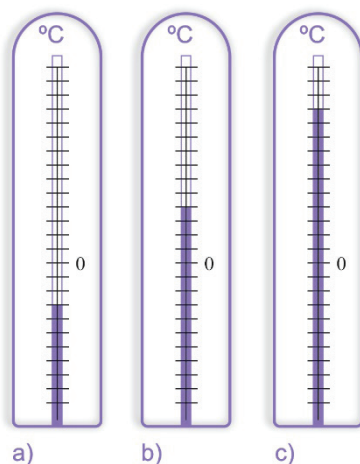
PRACTICA

9. Expresa con números enteros las siguientes situaciones de la vida cotidiana:

- a) La planta de ropa de niños está en la quinta planta.
- b) Hemos aparcado en el segundo sótano
- c) A las 5 de la tarde el termómetro marcaba 5° pero a las 10 de la noche había bajado ya 12 grados.
- d) María ha ganado 2.500 euros en un sorteo navideño.
- e) Si estoy en la planta 4ª, subo 2 pisos más en el ascensor y después bajo 7 plantas, ¿en qué planta me encuentro?

Solución: a) 5; b) -2; c) -7; d) 2.500 e) -1

10. Expresa con números enteros las temperaturas que marcan estos termómetros.



Solución: a) -3; b) 4; c) 12;

1.2.2 Operaciones con números enteros

A la hora de operar con números enteros hay que conocer de antemano las reglas de los signos:

REGLAS DE LOS SIGNOS

SUMA

Los números con el **mismo signo** se **suman** y el resultado es otro número con el mismo signo.

Ejemplos:

$$7 + 3 = 10$$

$$(-7) + (-3) = -10$$

$$-32 - 7 = -39$$

$$-40 + (-36) = -76$$

RESTA

Los números con **diferente signo** se **restan** y el resultado es otro número con el signo del mayor.

Ejemplos:

$$-7 + 3 = -4$$

$$7 - 3 = 4$$

$$25 - 13 = 12$$

$$-15 + 2 = -13$$

MULTIPLICACIÓN

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$- \cdot + = -$$

$$+ \cdot - = -$$

Ejemplos:

$$(+3) \cdot (+5) = 15$$

$$(-3) \cdot (-6) = 18$$

$$(-3) \cdot (+7) = -21$$

$$(+3) \cdot (-2) = -6$$

DIVISIÓN

$$+ \div + = +$$

$$- \div - = +$$

$$- \div + = -$$

$$+ \div - = -$$

Ejemplos:

$$(+5) \div (+5) = 1$$

$$(-8) \div (-2) = 4$$

$$(-32) \div (+4) = -8$$

$$(+14) \div (-2) = -7$$

i Importante

Cuando se suman o se restan números enteros no se multiplican los signos. Este es un error muy común que cometen un alto porcentaje de la población. Hay que seguir siempre la regla de los signos (fig.10)

Ejemplo: $(-3) + (-5) = -8$ (no se multiplica $-$ por $- = +$)

PRACTICA

11. Calcula las siguientes operaciones:

a) $-3 - 5 =$

g) $(-4) + (-2) + (-7) =$

b) $-8 + 4 =$

h) $10 + 7 - 32 =$

c) $8 + (-4) =$

i) $-4 + 12 + (-7) =$

d) $18 + (-9) =$

j) $-8 - 5 - 7 + 3 =$

e) $17 + 30 =$

k) $+4 + 12 - 5 - 6 =$

f) $-4 - 24 =$

l) $28 + (-7) + 3 =$

Solución: a) -8 ; b) -4 ; c) 4 ; d) 9 ; e) 47 ; f) -28 ; g) -13 ; h) -15 ; i) 1 ; j) -17 ; k) 5 ; l) 24 ;

12. Calcula las siguientes operaciones:

a) $(-13) \cdot (-2) =$

f) $(-34) \div (-2) =$

b) $-8 \cdot 4 =$

g) $(-4) \cdot (-2) \cdot (-7) =$

c) $28 \div (-4) =$

h) $10 \cdot 7 \div (-35) =$

d) $18 \div (-9) =$

i) $-4 \cdot 12 \div (-6) =$

e) $-27 \div 3 =$

j) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-7) =$

Solución: a) 26 ; b) -32 ; c) -7 ; d) -2 ; e) -9 ; f) 17 ; g) -56 ; h) -2 ; i) 8 ; j) -42 ;

1.2.3 Uso del paréntesis y de las reglas de prioridad en las operaciones

A la hora de realizar operaciones combinadas con números enteros hay que tener en cuenta las reglas de prioridad en las operaciones:

1. Se efectúan los paréntesis, si los hubiera. Dentro de ellos también hay que seguir el orden de las operaciones: primero multiplicaciones y divisiones, por último, sumas y restas.
2. Una vez resueltos los paréntesis, se realizan las multiplicaciones y divisiones, siempre de izquierda a derecha.
3. Por último, se realizan las sumas y las restas.

En el siguiente ejemplo puedes aprender paso a paso como se realiza una operación combinada con números enteros.

Ejemplo resuelto 3: realiza la siguiente operación combinada:

$$\begin{aligned}
 & (+3) \cdot [(+5) + (-3) \cdot 8 - 15] + 17 = && \text{primero realizamos las operaciones del paréntesis} \\
 & \quad \quad \quad \text{1ª multiplicación} \\
 & (+3) \cdot [(+5) + (-24) - 15] + 17 = && \text{se multiplican los signos para quitar los paréntesis} \\
 & \quad \quad \quad \text{sumas y restas} \\
 & 3 \cdot [5 - 24 - 15] + 17 = \\
 & \quad \quad \quad \text{1ª multiplicación} \\
 & 3 \cdot (-34) + 17 = && \text{al ser de diferente signo, se restan y se pone el signo del mayor.} \\
 & \quad \quad \quad \text{al final siempre: sumas y restas} \\
 & -102 + 17 = \\
 & \quad \quad \quad -85
 \end{aligned}$$

Lo más importante en las operaciones combinadas siempre es seguir con rigor el **orden de prioridad** de las operaciones.

PRACTICA

13. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $-5 \cdot (-3) + [(-4) \cdot 2 + (-10) + 3 \cdot 6] \div 5 =$

b) $(-13 - 15) \div (6 - 4) + [(7 - 5) \cdot (8 - (-4))] =$

c) $(-5 - 8 + 19) \div 2 + [(28 \div 7 - 2) + (-3) \cdot (-5)] =$

d) $120 \div (-2) + 30 \div 5 + 40 \cdot 8 =$

Solución: a) 15; b) 10; c) 20; d) 266;

1.3 FRACCIONES Y DECIMALES EN ENTORNOS COTIDIANOS

Una vez vistos los números naturales y los números enteros (positivos o naturales y negativos), nuestro día a día nos lleva a ampliar este conjunto al de los números racionales, porque no siempre podemos hablar de “partes enteras” de algo, también necesitamos hacer partes de ese todo.

Cuando vamos a comprar a la carnicería, frutería, etc, pedimos: un cuarto de jamón serrano, $\frac{1}{2}$ de judías verdes... Continuamente necesitamos repartir cosas: tocamos a $\frac{1}{6}$ de la tarta cada uno.

Esta ampliación de conjunto nos lleva a los números racionales: fraccionarios y decimales.

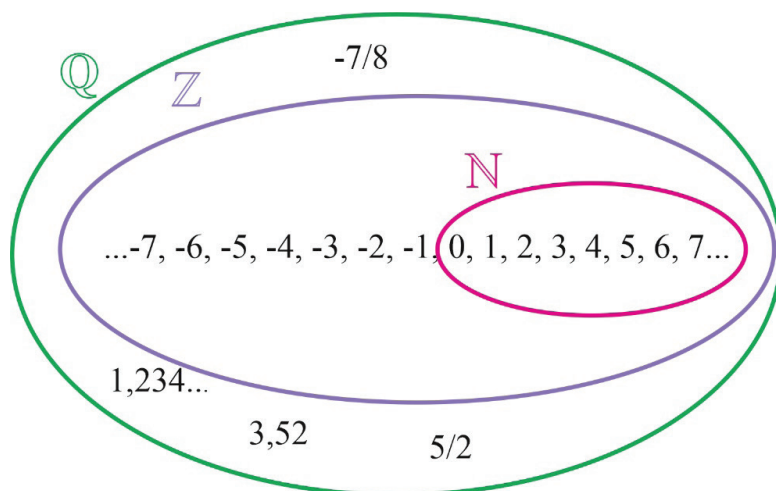


Fig. 12 Conjunto de números racionales

1.3.1 Significado y usos de las fracciones

¿Para qué sirven las fracciones? Las fracciones sirven para:

Expresar partes de una unidad: $7/8$; la unidad ha sido dividida en 8 partes iguales y de éstas, tomamos 7.

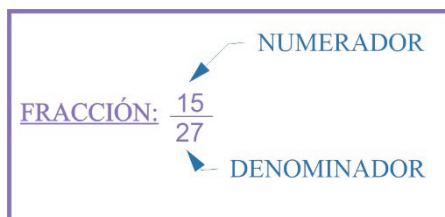
Expresar la división, sin realizar, de dos números: $54/9$; en este caso daría como resultado un número entero: 6; pero en muchas ocasiones el resultado es un número decimal: $7/5 = 1,4$.

Expresar una proporción: por ejemplo me he leído 210 páginas de las 325 que tiene el libro: $\frac{210}{325}$

Expresar porcentajes: 20 %: $\frac{20}{100}$

Las partes de una fracción son:

- **Numerador:** es el número de la parte superior de la fracción. Indica las partes de esa unidad que se han tomado.
- **Denominador:** es el número inferior. El denominador indica las partes en que se ha dividido la unidad.



Cómo se leen las fracciones:

$\frac{1}{2}$ → un medio; $\frac{1}{3}$ → un tercio; $\frac{1}{4}$ → un cuarto; $\frac{1}{5}$ → un quinto;

Cuando el denominador es mayor que 10 se leen añadiendo la terminación “avo”:

$\frac{13}{26}$ → trece ventiseisavos; $\frac{31}{44}$ → treinta y un cuarenta y cuatroavos;

En el caso de las fracciones con denominador 10, 100, 1000 se leen de la siguiente manera:

$\frac{3}{10}$ → tres décimos; $\frac{5}{100}$ → cinco centésimos; $\frac{1}{1000}$ → un milésimo;

PRACTICA

14. Escribe como se leen las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{21}; \frac{5}{12}; \frac{1}{56}; \frac{17}{100}; \frac{33}{1000}; \frac{49}{12};$$

Las fracciones pueden ser de tres tipos:

- **Fracción propia:** valor absoluto del NUMERADOR < valor absoluto DENOMINADOR

El resultado es menor que la unidad.

Ejemplo: $\frac{12}{15} = 0,8 < 1$

- **Fracción igual a la unidad:** valor absoluto NUMERADOR = valor absoluto DENOMINADOR

Ejemplo: $\frac{766}{766} = 1$

- **Fracción impropia:** valor absoluto NUMERADOR > valor absoluto DENOMINADOR

Resulta un número mayor que la unidad

Ejemplo: $\frac{25}{7} = 3,57 > 1$

→ **NÚMERO MIXTO:** las fracciones impropias se puede representar como un número entero y una fracción propia.

Ejemplo resuelto: Pasar la fracción $\frac{25}{7}$ a número mixto.

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 7} \\ 4 \quad 3 \end{array}$$

Sol: $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7} = 3\frac{4}{7}$

PRACTICA

15. Clasifica en propias, impropias o iguales a la unidad las siguientes fracciones:

$$a) \frac{25}{21}; b) \frac{12}{12}; c) \frac{-43}{56}; d) \frac{17}{100}; e) -\frac{33}{15}; f) \frac{49}{49}; g) \frac{5}{11}; h) \frac{49}{12}; i) -\frac{37}{72};$$

Solución: impropias: a, e, h; propias: c, d, g, i; igual a la unidad: b, f.

16. Expresa como número mixto estas fracciones impropias:

$$a) \frac{17}{6}; b) \frac{12}{5}; c) \frac{-43}{19}; d) \frac{35}{8};$$

Solución: a) $2\frac{5}{6}$; b) $2\frac{2}{5}$; c) $-2\frac{5}{19}$; d) $4\frac{3}{8}$;

▼ Fracciones equivalentes:

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si:

- La división de cada una de ellas da el mismo resultado.

- **Ejemplo:**

$$\frac{15}{3} \text{ y } \frac{45}{9} \quad \frac{15}{3} = 5 \text{ y } \frac{45}{9} = 5 \rightarrow \text{sí, son equivalentes}$$

- Si multiplicando en cruz ambas fracciones obtenemos el mismo resultado.

- **Ejemplo:**

$$\frac{5}{7} \text{ y } \frac{20}{28} \quad \frac{5}{7} \times \frac{20}{28} \Rightarrow 5 \cdot 28 = 140 \text{ y } 7 \cdot 20 = 140 \Rightarrow \text{sí, son equivalentes}$$

Cómo calcular fracciones equivalentes:

Amplificación: se multiplica numerador y denominador por el mismo número.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{10}{40} = \dots$$

$\begin{array}{c} \times 2 \quad \times 5 \\ \text{Arrows from } \frac{1}{4} \text{ to } \frac{2}{8} \text{ and } \frac{10}{40} \\ \times 2 \quad \times 5 \end{array}$

Simplificación: se divide numerador y denominador por el mismo número.

$$\frac{100}{40} = \frac{50}{20} = \frac{10}{4} = \dots$$

$\begin{array}{c} \div 2 \quad \div 5 \\ \text{Arrows from } \frac{100}{40} \text{ to } \frac{50}{20} \text{ and } \frac{10}{4} \\ \div 2 \quad \div 5 \end{array}$

En el caso de tener que simplificar fracciones con números muy grandes, es mejor descomponer en factores primos ambos números y después, simplificar los que estén repetidos arriba y abajo.

A la fracción simplificada al máximo resultante se le llama **FRACCIÓN IRREDUCTIBLE**.

Ejemplo resuelto 4: simplifica las fracciones siguientes.

$$\frac{1032}{428}$$

$$\frac{855}{513}$$

- Descomponemos numerador y denominador en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 1032 & 2 \\ 516 & 2 \\ 258 & 2 \\ 129 & 3 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 660 & 2 \\ 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 5 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 855 & 3 \\ 285 & 3 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 513 & 3 \\ 171 & 3 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

- Simplificamos los factores comunes en numerador y denominador.

$$\frac{1032}{660} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 43}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5 \cdot 11} = \frac{86}{55}$$

$$\frac{855}{513} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{19}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{19}} = \frac{5}{3}$$

Una vez que simplificamos al máximo, a la fracción obtenida se le llama: fracción irreducible.

PRACTICA

17. Comprueba si son equivalentes estos pares de fracciones

a) $\frac{16}{8}$ y $\frac{10}{5}$

b) $\frac{-4}{16}$ y $\frac{3}{8}$

c) $\frac{24}{12}$ y $\frac{8}{3}$

d) $\frac{7}{21}$ y $\frac{3}{9}$

Solución: a) si b) no; c) no; d) si

18. Calcula el término desconocido para que estos pares de fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{13}{4}$ y $\frac{x}{8}$

b) $\frac{x}{16}$ y $\frac{3}{8}$

c) $\frac{x}{12}$ y $\frac{8}{3}$

d) $\frac{7}{21}$ y $\frac{x}{9}$

Solución: a) 26 b) 6; c) 32; d) 3

19. Escribe tres fracciones equivalentes a las siguientes por amplificación:

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{-3}{5}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{3}{9}$

20. Escribe tres fracciones equivalentes a las siguientes por simplificación:

a) $\frac{125}{625}$ b) $\frac{-104}{160}$ c) $\frac{249}{1005}$ d) $\frac{807}{315}$

21. Simplifica al máximo las fracciones siguientes:

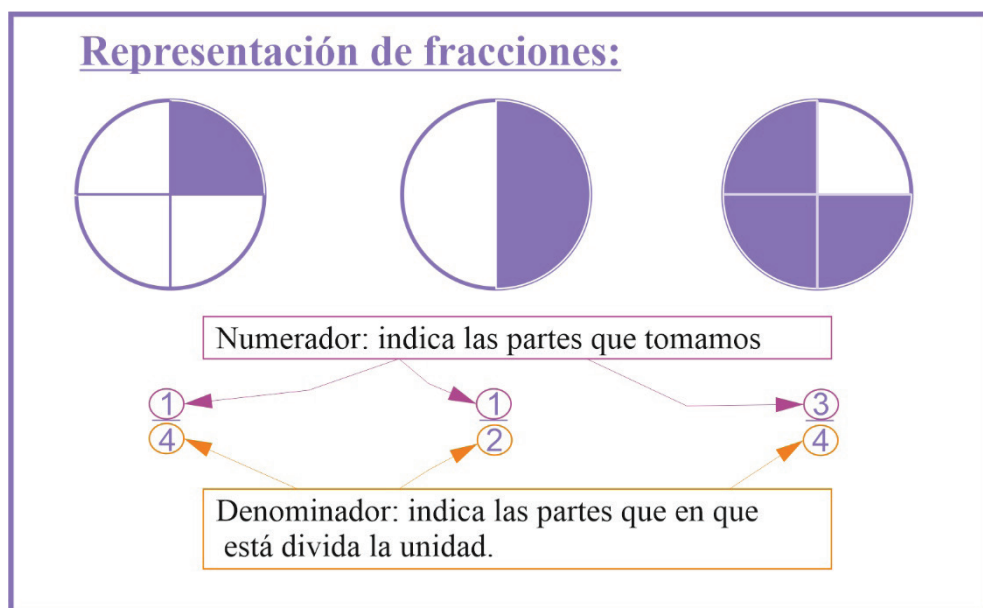
a) $\frac{1024}{2000}$ b) $\frac{-3016}{660}$ c) $\frac{32}{128}$ d) $\frac{507}{1017}$

Solución: a) $\frac{64}{125}$; b) $\frac{-754}{165}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{169}{339}$;

1.3.2 Representación gráfica de las fracciones

Para representar fracciones gráficamente se divide una unidad en partes iguales y se marcan las partes que tenemos.

En la figura siguiente están representadas varias a modo de ejemplo.



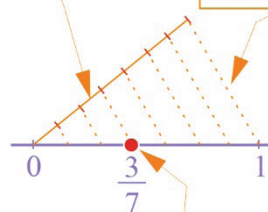
Además, podemos representar las fracciones en la recta real.

Representación de fracciones en la recta real:

Fracciones propias:

1° Trazamos una recta desde el 0 y la dividimos en tantas partes como indique el denominador.

2° Unimos con una nueva recta el extremo de dicha recta con el 1 y vamos trazando paralelas a ella por cada una de las divisiones.

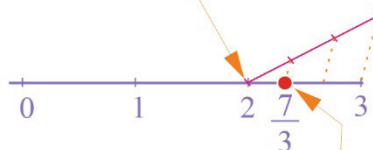


Por último contamos desde el 0 las unidades que indica el denominador y ese punto será el que representa la fracción que queremos.

Fracciones impropias:

1° Pasamos de fracción a número mixto.

$$7 \overline{) 3} \quad \frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}$$



A partir de la parte entera del número mixto, colocamos la recta para representar la parte fraccionaria siguiendo el mismo método que hemos explicado para las fracciones propias.

PRACTICA

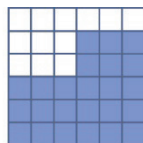
22. Indica qué fracciones están representadas en los gráficos siguientes:



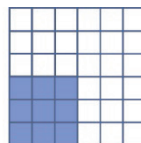
a)



b)



c)



d)

Solución: a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$

23. Representa las siguientes fracciones gráficamente:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{1}{9}$

24. Representa las siguientes fracciones en la recta real.

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{11}{3}$ d) $\frac{7}{4}$

1.3.3 Ordenación de fracciones

Las fracciones se pueden comparar y ordenar de varias formas:

- **Fracciones con mismo denominador:** solo hay que fijarse en el numerador. A numerador mayor, mayor es la fracción.

Ejemplo:

$$\frac{1}{8} < \frac{3}{8} < \frac{7}{8}$$

- **Fracciones con diferente denominador:** en este caso habría que aplicar el método de *reducción a común denominador* que consiste en calcular el m.c.m de todos los denominadores y así poder ordenarlas ya como en el caso anterior.

Ejemplo resuelto 5: ordena de menor a mayor las fracciones:

$$\frac{-1}{3} \quad \frac{-2}{7} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{5}{2}$$

- Calculamos m.c.m (2, 3, 4, 5, 7) = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} 420:3 \\ -1 \cdot \overline{140} \\ \hline 420 \\ -140 \\ \hline 420 \end{array} & \begin{array}{c} 420:7 \\ -2 \cdot \overline{60} \\ \hline 420 \\ -120 \\ \hline 420 \end{array} & \begin{array}{c} 420:5 \\ 3 \cdot \overline{84} \\ \hline 420 \\ 252 \\ \hline 420 \end{array} & \begin{array}{c} 420:4 \\ 1 \cdot \overline{105} \\ \hline 420 \\ 105 \\ \hline 420 \end{array} & \begin{array}{c} 420:2 \\ 5 \cdot \overline{210} \\ \hline 420 \\ 1050 \\ \hline 420 \end{array} \end{array}$$

- Ordenamos las fracciones obtenidas.

$$\frac{-140}{420} < \frac{-120}{420} < \frac{105}{420} < \frac{252}{420} < \frac{1050}{420}$$

Por último, dejamos ordenadas las fracciones que daban en el enunciado:

$$\frac{-1}{3} < \frac{-2}{7} < \frac{1}{4} < \frac{3}{5} < \frac{5}{2}$$

PRACTICA

25. Ordena estas fracciones de menor a mayor.

$$\frac{3}{6} \quad \frac{2}{6} \quad -\frac{11}{6} \quad \frac{7}{6}$$

Solución: $-\frac{11}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{7}{6}$

26. Ordena estas fracciones de menor a mayor.

$$\frac{3}{5} \quad \frac{1}{11} \quad -\frac{11}{3} \quad \frac{2}{7}$$

Solución: $-\frac{11}{3} < \frac{1}{11} < \frac{2}{7} < \frac{3}{5}$

1.3.4 Operaciones con fracciones

Sumas y restas

► Fracciones con el mismo denominador

Se suman o se restan los numeradores y el resultado es otra fracción con el numerador resultado de dicha suma o resta y con el mismo denominador que ya tenían por separado.

Ejemplo:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

► Fracciones con diferente denominador

- Primero se calcula el m.c.m (mínimo común múltiplo) de todos los denominadores.
- Después se divide el denominador calculado común entre cada uno de los denominadores iniciales y el resultado se va multiplicando por el numerador correspondiente.

- Por último, como ya tenemos el denominador igual, procedemos a la suma o resta de los numeradores.

Ejemplo resuelto: resuelve esta operación:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{5}{3}$$

- Calculamos m.c.m (2, 3, 5) = $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$$\frac{\overset{30:5}{3 \cdot 6}}{30} + \frac{\overset{30:2}{1 \cdot 15}}{30} + \frac{\overset{30:3}{5 \cdot 10}}{30} = \frac{18}{30} + \frac{15}{30} + \frac{50}{30} = \frac{83}{30}$$

Multiplikaciones y divisiones

Multiplikación: se multiplikan en línea, es decir, numerador por numerador y denominador por denominador.

Ejemplo resuelto 6: resuelve estas operaciones.

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 5}{5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

multiplikamos en línea

DIVISIÓN DE FRACCIONES

$$\frac{-3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{-3 \cdot 2}{5 \cdot 1} = \frac{-6}{5}$$

multiplikamos en cruz

Operaciones combinadas con fracciones

Igual que en el caso de los números enteros podemos realizar operaciones combinadas con fracciones.

El orden de las operaciones siempre es el mismo: primero paréntesis, después multiplikaciones y divisiones y por último, sumas y restas.

Ejemplo resuelto: calcula las operaciones combinadas.

$$\text{a)} \quad -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{10} + \frac{5}{10}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{-14}{30} = \frac{-7}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 3 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{5} \div \frac{2}{3} + 1\right) \div \frac{2}{5} \\ &= 3 \cdot \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{3}{10} + 1\right) \div \frac{2}{5} \\ &= 3 \cdot \left(\frac{4}{30} + \frac{5}{30}\right) - \left(\frac{3}{10} + \frac{10}{10}\right) \div \frac{2}{5} \\ &= 3 \cdot \frac{9}{30} - \frac{13}{10} \div \frac{2}{5} = \frac{27}{30} - \frac{13}{10} \div \frac{2}{5} \\ &= \frac{27}{30} - \frac{65}{20} = \frac{54}{60} - \frac{195}{60} = -\frac{141}{60} = -\frac{47}{20} \end{aligned}$$

PRACTICA

27. Resuelve:

$$\text{a)} \quad \frac{6}{25} + \frac{-2}{25}$$

$$\text{b)} \quad \frac{-5}{11} + 15$$

$$\text{c)} \quad \frac{-70}{3} \div \frac{4}{8}$$

$$\text{d)} \quad \frac{13}{2} \cdot \frac{4}{10}$$

$$\text{e)} \quad \frac{1}{2} + \frac{(-2)}{3} + \frac{13}{5}$$

$$\text{f)} \quad \frac{10}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{g)} \quad \frac{15}{2} \div \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\text{h)} \quad \frac{15}{3} - \frac{5}{4} - \frac{7}{2}$$

Solución: a) $\frac{4}{25}$; b) $\frac{160}{11}$; c) $-\frac{140}{3}$; d) $\frac{13}{5}$; e) $\frac{73}{30}$; f) $\frac{5}{21}$; g) $\frac{12}{7}$; h) $\frac{1}{4}$;